CAPITOLO 3

La trasformata di Laplace

3.1 Le proprietà della Trasformata di Laplace unilatera

La trasformata di Laplace unilatera è la funzione $X(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$X(s) = \mathcal{L}\big[x(t)\big](s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

dove l'insieme $\alpha_x = \inf\{s : s \in dom(X)\}$ è detta ascissa di convergenza.

Si dimostrano di seguito le proprietà della trasfromata unilatera.

Linearità

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)](s) = aX(s) + bY(s)$$

se $a, b \in \mathbb{R}$ e se $s > max\{\alpha_x, \alpha_y\}$.
La dimostrazione è immediata e segue dalla proprietà di linerità dell'integrale.

Traslazione

$$\mathcal{L}[x(t-a)u(t-a)](s) = e^{-as}X(s)$$

se $a \in \mathbb{R}$ e $s > \alpha_x$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x(t-a)u(t-a)](s) &= \int_a^{+\infty} x(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t \quad \text{ponendo} \quad t = r + a \\
&= \int_0^{+\infty} x(r)e^{-(r+a)s}\mathrm{d}r = e^{-sa}\int_0^{+\infty} x(r)e^{-rs}\mathrm{d}r \\
&= e^{-as}X(s)
\end{aligned}$$

Modulazione

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s) = X(s-a)$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $s > a + \alpha_x$
Per definizione infatti si ha

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{at}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = X(s-a)$$

per ogni $s > a + \alpha_x$

Scalamento

$$\mathcal{L}[x(at)](s) = \frac{1}{a}X\Big(\frac{s}{a}\Big)$$

con $a > 0$ per ogni $s > a\alpha_x$
Infatti

$$\mathcal{L}[x(at)](s) = \int_0^{+\infty} x(at)e^{-st}\mathrm{d}t \quad \text{ponendo t=r/a si ha} \quad \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} x(r)e^{-sr/a}\mathrm{d}r = \frac{1}{a}X\Big(\frac{s}{a}\Big)$$

per ogni $s > a\alpha_x$

Derivazione rispetto ad s

$$-\frac{d}{ds}X(s) = \mathcal{L}[tx(t)](s)$$

per ogni $s > \alpha_x$.
Poiché è possibile dimostrare che è lecito scambiare l'ordine tra derivazione ed integrazione si ha:

$$X'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Bigg(\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t\Bigg) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Bigg(x(t)e^{-st}\Bigg)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x(t)\Big(-te^{-st}\Big)\mathrm{d}t = -\mathcal{L}[tx(t)](s)$$

Derivazione rispetto a t

$$\mathcal{L}[x'(t)](s) = sX(s) - x(0^+)$$

con $s > max\{\alpha_x, \alpha_{x\prime}\}$
. Tale proprietà può essere applicata in successione; la trasformata della derivata seconda sarà infatti:

$$\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+)$$

Trasformata della convoluzione

$$\mathcal{L}[(x * y)(t)](s) = X(s)Y(s)$$

con $s > max\{\alpha_x, \alpha_{x\prime}\}$ dove il prodotto di convoluzione tra due funzioni è definito come:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-r)g(r)dr$$

Dunque risulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(x * y)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (x * y)(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\Bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-r)y(r)dr\Bigg)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty}\Bigg(\int_0^{+\infty} x(t-r)y(r)dr\Bigg)e^{-st}dt \ \text{ poiché per ipotesi } y(r) \text{ è nulla per } r < 0 \\
&\text{operando ora un cambio di variabili: } u = t - r \text{ si ottiene} \\
&= \int_0^{+\infty} y(r)\int_0^{+\infty} x(t-r)e^{-st}dr = \int_0^{+\infty} y(r)e^{-sr}\Bigg(\int_0^{+\infty} x(u)e^{-su}du\Bigg)dr \\
&= \Bigg(\int_0^{+\infty} y(r)e^{sr}\Bigg)\Bigg(\int_0^{+\infty} x(u)e^{-su}du\Bigg) = X(s)Y(s)
\end{aligned}$$

Integrale della trasformata

$$\int_s^{+\infty} X(r)dr = \mathcal{L}\left[\frac{x(t)}{t}\right](s)$$

per $s > \alpha_x$ che deriva direttamente dalla proprietà di derivazione rispetto a s.

Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t x(r)dr\Big](s) = \frac{X(s)}{s}$$

per $s > \max\{0, \alpha_x\}$ che deriva dalla proprietà di derivazione rispetto a t

Trasformata di funzioni periodiche

Dato un segnale $x_0(t)$ la caratteristiche del quale siano:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } 0 \le t < T \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

e si abbia

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t - nT)$$

allora

$$\mathcal{L}\Big[f(t)\Big](s) = \mathcal{L}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t-nT)\Big](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}\big[x_0(t)\big](s) \cdot e^{-nTs} = \mathcal{L}[x_0(t)](s) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs} = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)](s)}{1 - e^{-Ts}}$$

3.2 Cenni alla trasformata di Fourier

La trasformata di Laplace bilatera

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$$

è funzione della variabile *complessa* s. Se l'asse immaginario $\mathrm{i}\mathbf{R}$ è contenuto nel dominio $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{L}f)$ (ciò che non è vero sempre, per esempio non è vero se $f(t) = \mathrm{e}^t$) posso porre $s = \mathrm{i}\omega$ e trovo la *trasformata di Fourier*

$$\hat{f}(\omega) \equiv (\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{3.1}$$

Discretizzando il tempo t, cioè ponendo $t_k = k\Delta t$, si osserva che $(\mathcal{F}f)(\omega)$ è il limite di somme del tipo

$$\sum_k \exp(\mathrm{i}\omega t_k)\; f(t_k)\; \Delta t$$

e quindi è una specie di prodotto scalare, o di "proiezione", della funzione $f(t)$ sulla funzione $\exp(\mathrm{i}\omega t)$. Questo fa pensare che si possa "ricostruire" la funzione $f(t)$ risommando le onde piane $\exp(\mathrm{i}\omega t)$, ognuna moltiplicata per la componente di Fourier $\hat{f}(\omega)$.

3.3 Formula di inversione

Applico la trasformata di Fourier due volte:

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}\omega t)\, \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\omega t')\, f(t')\, \mathrm{d}t' = \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\mathrm{i}\omega (t - t')] \right) \mathrm{d}\omega\, f(t') \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, 2\pi\delta(t - t')\, f(t') \\
= & \; 2\pi f(t)
\end{aligned}
$$

poiché

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}\omega t)\, \mathrm{d}\omega \\
= & \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \exp(\mathrm{i}\omega t)\, \mathrm{d}\omega \\
= & \lim_{N\to\infty} 2 \frac{\sin Nt}{t} \\
= & \; 2\pi\delta(t)
\end{aligned}
$$

ricordando che

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} \mathrm{d}t = \pi
$$

Di qui segue la *formula di inversione*:

$$
\left(\mathcal{L}^{-1} \hat{f} \right)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \hat{f}(\omega)\, \mathrm{d}\omega
$$