

---

---

## CAPITOLO 2

---

# Funzione generatrice dei momenti e cammino aleatorio

### 2.1 Funzione generatrice dei momenti e trasformata di Laplace

Il calcolo dei momenti di una funzione di distribuzione di probabilità può essere scomodo se effettuato usando la definizione. Si può usare più semplicemente la seguente operazione, che chiamiamo *Trasformata di Laplace*, e che applichiamo per ora alla distribuzione di probabilità gaussiana  $\varphi_s$ :

$$\mathcal{L}[\varphi_s](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s \cdot e^{-su} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} du \quad (2.1)$$

Se si calcola la derivata prima rispetto alla variabile  $s$  della trasformata otteniamo, sfruttando le proprietà di derivate ed integrali:

$$-\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\varphi_s](s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} du \quad (2.2)$$

Se ancora calcoliamo la derivata seconda rispetto alla variabile  $s$  della trasformata avremo:

$$\left(-\frac{d}{ds}\right)^2 \mathcal{L}[\varphi_s](s) = -\frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} du = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} du \quad (2.3)$$

Si noti ora che se valutiamo in  $s = 0$  la trasformata nell'equazione 2.1 otteniamo l'espressione semplice della densità di probabilità gaussiana, ovvero il suo momento di ordine 0; se invece valutiamo in  $s = 0$  la derivata prima nell'equazione 2.2 otteniamo il valore atteso della densità gaussiana, ovvero il momento di ordine 1; infine se operiamo allo stesso modo sull'espressione 2.3 otteniamo il momento di ordine 2.

Dunque, sapendo calcolare la trasformata di Laplace otteniamo anche, calcolandone le derivate successive, i momenti successivi. Basta quindi saper calcolare dunque il primo integrale, che si può calcolare in questo caso facilmente con il trucco del completamento del quadrato:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\varphi_s](s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - su - \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2}} du \\
&= e^{\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u+s)^2} du \quad \text{ponendo } w = u + s \quad \text{e dunque } dw = du \\
&= e^{\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = e^{\frac{s^2}{2}} \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Ma allora è facile calcolare i vari momenti usando il risultato 2.4:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \mathcal{L}[\varphi_s](0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
m_1 &= -\mathcal{L}'[\varphi_s](0) = -s e^{-\frac{s^2}{2}} \Big|_{s=0} = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
m_2 &= \mathcal{L}''[\varphi_s](0) = (1 + s^2) e^{-\frac{s^2}{2}} \Big|_{s=0} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
m_3 &= -\mathcal{L}'''[\varphi_s](0) = [2s + (1 + s^2)s] e^{-\frac{s^2}{2}} \Big|_{s=0} = 0
\end{aligned}$$

e così via (si noti che nel caso della gaussiana tutti i momenti dispari sono nulli).

In generale, data una variabile aleatoria  $X$  per la quale  $e^{-sX}$  ammetta media, allora la funzione

$$Z_X(x) = E(e^{-sX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sX} f_X(x) dx$$

è la *Funzione Generatrice dei Momenti* e coincide con la *Trasformata di Laplace* della densità di probabilità di  $X$ . Rimandiamo al capitolo 3 una trattazione dedicata alla trasformata di Laplace, alle sue proprietà ed alle sue applicazioni. La proprietà della funzione generatrice dei momenti che utilizziamo in questa sezione è che il momento  $n$ -esimo si può calcolare come

$$E(X^n) = (-1)^n \frac{d^n(Z_X(x))}{ds^n} \Big|_{s=0} \tag{2.5}$$

Se ora vogliamo calcolare utilizzando la proprietà precedente i momenti della generica distribuzione gaussiana avente media  $v_0$  e varianza  $\sigma$  ne dobbiamo calcolare la trasformata ottenendo

$$\mathcal{L}[\varphi_{v_0, \sigma}](s) = e^{-sv_0} e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\varphi_{v_0, \sigma}](s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma^2}} dv \\
&= \text{se poniamo } v = v_0 + \sigma u \quad \text{si ha } u = \frac{v-v_0}{\sigma}, \quad du = \frac{dv}{\sigma} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(v_0 + \sigma u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= e^{-sv_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma su} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= e^{-sv_0} e^{\frac{(\sigma s)^2}{2}}
\end{aligned}$$

Il momento di ordine 1 sarà

$$-\mathcal{L}'[\varphi_{v_0, \sigma}](0) = -(-v_0 + \sigma^2 s) e^{-sv_0} e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \Big|_{s=0} = v_0$$

e successivamente:

$$\mathcal{L}''[\varphi_{v_0, \sigma}](0) = E(V^2) = [\sigma^2 + (-v_0 + \sigma^2 s)^2] e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \Big|_{s=0} = \sigma^2 + v_0^2$$

Dunque se vogliamo calcolare la varianza della gaussiana<sup>1</sup>:

$$\text{Var}(V) = E(V^2) - [E(V)]^2 = \sigma^2 + v_0^2 - v_0^2 = \sigma^2$$

## 2.2 Cumulanti e funzione generatrice dei cumulanti

Si definisce *Funzione Generatrice dei Cumulanti*

$$\ln(\mathcal{L}(s))$$

che nel caso della gaussiana è:

$$\ln(\mathcal{L}(s)) = \ln\left(e^{-sv_0} e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}}\right) = -sv_0 + \frac{\sigma^2 s^2}{2}$$

e il cumulante  $n$ -esimo sarà:

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^n \ln \mathcal{L}(s) \Big|_{s=0}$$

In generale il primo cumulante è uguale al primo momento, infatti:

$$-\frac{d}{ds} \ln(\mathcal{L}(s)) \Big|_{s=0} = -\frac{\mathcal{L}'(0)}{\mathcal{L}(0)}$$

Il secondo cumulante è invece la varianza:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{ds}\right)^2 \ln(\mathcal{L}(s)) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \frac{\mathcal{L}'(s)}{\mathcal{L}(s)} \Big|_{s=0} = \frac{\mathcal{L}''(0)\mathcal{L}(0) - (\mathcal{L}'(0))^2}{\mathcal{L}^2(0)} \\ &= \mathcal{L}''(0) - (\mathcal{L}'(0))^2 = E(V^2) - (E(V))^2 \\ &= \text{Var}(V) \end{aligned}$$

In particolare nel caso della gaussiana si ha:

1° **cumulante:**  $v_0 = E(V)$

2° **cumulante:**  $\sigma^2 = \text{Var}(V)$

3° **cumulante:** 0

4° **cumulante:** 0

<sup>1</sup>Oppure, più direttamente, dovremmo risolvere l'integrale

$$\begin{aligned} \text{Var}(V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (v - E(V))^2 f(v) \, dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (v - v_0)^2 \frac{e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \, dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u)^2 \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, du \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, du \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la sostituzione

$$u = \frac{v - v_0}{\sigma}, \quad v = v_0 + \sigma u, \quad du = \frac{dv}{\sigma}$$

## 2.3 Cammino aleatorio

Consideriamo il seguente problema: un ubriaco parte al tempo 0 dall'origine dell'asse X; ad ogni istante di tempo  $n=1,2,3,\dots$  si muove di  $V_n$ , una quantità che può essere positiva o negativa, e che è una variabile aleatoria gaussiana centrata, cioè:

$$P(v < V_x < v + \Delta v) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{v}{\sigma}\right) \Delta v$$

In questa situazione, qual è la probabilità che al tempo  $n$  l'ubriaco si trovi in prossimità di un dato punto  $X$  dell'asse  $x$ ?

La posizione dell'ubriaco al tempo  $n$  è

$$X_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

Quindi la posizione al tempo  $n$  è la somma di  $n$  variabili aleatorie. Noi vorremmo conoscere la densità di probabilità di  $X_n$ , visto che conosciamo quella di  $V_n$ . Andiamo per passi. Se il tempo  $n = 1$  allora  $X_1 = V_1$  e la densità di probabilità è nota.

Se invece  $n = 2$ , e allora  $X_2 = V_1 + V_2$ , ricorriamo alla descrizione effettuata nell'espressione 1.18 a pagina 15:

$$f_{V_1}(v_1) = E(\delta(V_1 - v_1)) \quad (2.6)$$

$$f_{V_2}(v_2) = E(\delta(V_2 - v_2)) \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

Dunque, con la stessa notazione,

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= E(\delta(X_2 - x_2)) = E(\delta(V_1 + V_2 - x_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 f_{V_1}(v_1) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 f_{V_2}(v_2) \delta(v_1 + v_2 - x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_2}(v_2) dv_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v_1) \delta(v_1 + v_2 - x_2) dv_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(x_2 - v_2) f_{V_2}(v_2) dv_2 \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta nell'ultima riga è detta *convoluzione* delle due funzioni  $f_{V_1}$  ed  $f_{V_2}$  e viene indicata con:

$$(f_{V_1} * f_{V_2})(x_2)$$

**Teorema** La distribuzione di probabilità della somma di due variabili aleatorie è la *convoluzione* delle due densità di probabilità.

Questo risultato apparentemente non ci aiuta a risolvere il problema che ci siamo posti, a meno che non siamo in grado di calcolare la convoluzione  $(f_{V_1} * f_{V_2})(x_2)$ . Proviamo allora a calcolare la funzione generatrice dei momenti della variabile  $X_2$  (ovvero al T. di L.):

$$\begin{aligned} MGF_{X_2}(x_2) &= \mathcal{L}[f(X_2)](s) = E\left(e^{-sx_2}\right) = E\left(e^{-s(V_1+V_2)}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v_1) e^{-sv_1} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_2}(v_2) e^{-sv_2} dv_2 = \mathcal{L}[f(V_1)](s) \cdot \mathcal{L}[f(V_2)](s) \end{aligned}$$

**Teorema** La trasformata di Laplace trasforma il prodotto di convoluzione tra due funzioni nel prodotto tra le trasformate della due funzioni:

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2](s) = \mathcal{L}[f_1](s) \cdot \mathcal{L}[f_2](s) \quad (2.9)$$

A questo punto, visto che conosciamo ciascuna delle trasformate delle distribuzioni, possiamo calcolare ciò che ci serve:

$$\mathcal{L}_{X_2}(s) = \mathcal{L}_{V_1}(s) \cdot \mathcal{L}_{V_2}(s) = e^{-sv_{10}} e^{-\frac{\sigma_1^2 s^2}{2}} \cdot e^{-sv_{20}} e^{-\frac{\sigma_2^2 s^2}{2}} = e^{-s(v_{10}+v_{20})} e^{-s^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$$

che è ancora la funzione generatrice di una distribuzione gaussiana, con varianza somma delle varianze e valore atteso somma dei valori attesi.

**Teorema** La somma di due variabili aleatorie indipendenti entrambe aventi distribuzione di probabilità gaussiana è ancora una variabile aleatoria avente distribuzione di probabilità gaussiana con varianza pari alla somma delle varianze e valore atteso somma dei valori attesi:

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{x_2 - (v_{10} + v_{20})}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

È evidente che si può generalizzare :

**Teorema** La somma di  $n$  variabili aleatorie indipendenti aventi ciascuna distribuzione di probabilità gaussiana è ancora una variabile aleatoria avente distribuzione di probabilità gaussiana con varianza pari alla somma delle varianze e valore atteso somma dei valori attesi.

Allora tornando al nostro problema iniziale avremo:

$$E(X_n) = E(V_1 + V_2 + \dots + V_n) = E(V_1) + E(V_2) + \dots + E(V_n) = 0$$

e

$$Var(X_n) = Var(V_1) + Var(V_2) + \dots + Var(V_n) = n\sigma^2$$

quindi la distribuzione di probabilità del cammino aleatorio sarà:

$$f_{X_n}(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{x_n^2}{2n\sigma^2}}$$

Si osservi che il valore  $\sqrt{Var(X_n)} = \sqrt{n}\sigma$  è una misura della distanza che l'ubriaco ha percorso in media dopo  $n$  passi. Ovvero, poichè il numero di passi è proporzionale al tempo, la distanza percorsa è in media proporzionale alla radice quadrata del tempo trascorso. Questo fatto rappresenta una delle proprietà fondamentali del cammino aleatorio.