

Politecnico di Torino
II Facoltà di Ingegneria - sede di Vercelli

Temi d'esame del corso di Metodi Matematici e Statistici

Per gli allievi in Ingegneria Elettronica ed Informatica

Anni accademici: da 99/00 a 03/04

a cura di Mariagrazia Graziano

17 maggio 2005

CAPITOLO 1

Anno accademico 99/00

1.1 Tema d'esame del 21/03/2000

1.1.1 Compito A

Esercizio 1

- (a) Disegnare la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria che ha legge $B(2, 1/2)$.
- (b) Se X è una variabile aleatoria di legge $N(0, 1)$, si calcoli $\mathbf{E}(|X|)$.
- (c) Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti di legge Poissoniana $Q(1)$, si calcoli $\mathbf{P}(X+Y \leq 1)$.

Esercizio 2

Una variabile aleatoria continua X ha densità di probabilità data da $f(x) = a \ln x$ per $1 \leq x \leq 2$ e $f(x) = 0$ al di fuori. Determinare

- (a) il parametro a .
- (b) la funzione di ripartizione di X e tracciarne un grafico qualitativo.
- (c) la media e la varianza di X .
- (d) la funzione di ripartizione e la densità di $Y = \ln X$.

Esercizio 3

Si enunci e si dimostri il teorema di Bayes. Si risolva poi il seguente problema: vi sono tre dadi a sei faccie, due normali con i numeri da 1 a 6 sulle sei faccie ed uno truccato con il numero 1 su tre faccie, il 3 su due ed il 5 sulla rimanente faccia. Si sceglie a caso un dado, senza poter vedere se è quello truccato, e lo si lancia due volte. Calcolare

- (a) la probabilità che nei due lanci si ottenga due volte il numero 3.

- (b) la probabilità che la somma dei risultati ottenuti nei due lanci sia uguale a 6.
- (c) la probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che nei due lanci si è ottenuto due volte il numero 3.
- (d) la probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che la somma dei risultati ottenuti nei due lanci è stata uguale a 6.

Esercizio 4

Determinare le trasformate di Laplace (e relativi semipiani di esistenza) delle seguenti funzioni

$$\sin(\alpha x + \beta), \quad \cos(\alpha x + \beta) \quad (x \geq 0)$$

al variare di α e β parametri reali.

- (a) Determinare le trasformate di Laplace (e relativi semipiani di esistenza) delle seguenti funzioni

$$\sin(\alpha x + \beta), \quad \cos(\alpha x + \beta) \quad (x \geq 0)$$

al variare di α e β parametri reali.

- (b) Determinare la trasformata inversa di Laplace di

$$\frac{as + b}{s^2 + \alpha^2}$$

al variare di a , b e α parametri reali.

- (c) Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = \sin(3x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.2 Tema d'esame del 28/03/2000

1.2.1 Compito A

Esercizio 1

- (a) Sia X una v.a. di legge $N(1, 2)$. Calcolare $\mathbf{E}(2X + 3)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(X^3)$.
- (b) Si dica quali delle seguenti funzioni, è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

- (c) Si dimostri che se X e Y sono v.a. discrete indipendenti, allora:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Esercizio 2

- (a) Si spieghi quando una variabile aleatoria è detta esponenziale di parametro λ e se ne calcoli esplicitamente il valor medio.
- (b) Si consideri poi il seguente problema: siano A , B e C tre apparecchiature con tempi di vita (durata prima del guasto), rispettivamente, T_A , T_B e T_C modellabili come variabili aleatorie esponenziali tra loro indipendenti di parametri uguali, rispettivamente, ad 1 per T_A , 2 per T_B e 3 per T_C . Si consideri l'apparecchiatura $A \perp_p B$ ottenuta interconnettendo A e B in parallelo, e $(A \perp_p B) \perp_s C$ ottenuta interconnettendo in serie $A \perp_p B$ e C .

Siano $T_{A \perp_p B}$ e $T_{(A \perp_p B) \perp_s C}$ i tempi di vita delle due apparecchiature. Calcolare

- (b.1) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{A \perp_p B}$.
- (b.2) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{(A \perp_p B) \perp_s C}$.
- (b.3) il valor medio di $T_{(A \perp_p B) \perp_s C}$.

Si ricorda che, per convenzione, una interconnessione in parallelo si considera guasta se entrambe le apparecchiature lo sono, mentre una interconnessione in serie si considera guasta se almeno una delle due apparecchiature lo è.

Esercizio 3

Ad un negozio A di componenti elettronici vengono richiesti, in media, 2 chip di tipo Σ ogni settimana. All'inizio di ogni settimana il negozio si rifornisce in modo da avere di scorta 2 chip del tipo Σ . Un altro negozio B dello stesso tipo, ma situato in un'altra zona della città, ha invece richieste di un solo chip di tipo Σ ogni settimana, ma come A mantiene una scorta di 2 chip del tipo Σ . Si supponga che il numero di richieste di chip Σ per settimana per i due negozi si possano modellare come due v.a. Poissoniane indipendenti e si calcoli

- (a) la probabilità che in una settimana il negozio A perda almeno una vendita del chip Σ .
- (b) la probabilità che in una settimana entrambi i negozi perdano almeno una vendita ciascuno del chip Σ .
- (c) la probabilità che in una settimana almeno uno dei due negozi perda almeno una vendita del chip Σ .
- (d) Ad un certo punto i due negozi si uniscono in società e cooperano scambiandosi tra loro eventuali chip Σ quando uno dei due negozi lo necessita per non perdere una vendita e l'altro ne ha ancora. Sotto questa nuova ipotesi e mantenendo invariate tutte le altre, si effettui di nuovo il calcolo specificato in (c).

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 2\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 2\pi$.

- (a) Determinare le trasformate di Laplace (e relativi zone di esistenza) di $J(x)$ e delle funzioni $J(x)e^{\alpha x}$ al variare del parametro complesso α .
- (b) Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \sin x$.

(c) Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s})$$

(d) Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.2.2 Compito B

Esercizio 1

(a) Sia X una v.a. di legge $N(2, 2)$. Calcolare $\mathbf{E}(3X + 1)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(X^3)$.

(b) Si dica quali delle seguenti funzioni, è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan 3x + \frac{1}{2}$$

(c) Si dimostri il teorema delle probabilità totali.

Esercizio 2

(a) Si spieghi quando una variabile aleatoria è detta esponenziale di parametro λ e se ne calcoli esplicitamente il valor medio.

(b) Si consideri poi il seguente problema: siano A , B e C tre apparecchiature con tempi di vita (durata prima del guasto), rispettivamente, T_A , T_B e T_C modellabili come variabili aleatorie esponenziali tra loro indipendenti di parametri uguali, rispettivamente, ad 1 per T_A , 2 per T_B e 3 per T_C . Si consideri l'apparecchiatura $A \perp_p C$ ottenuta interconnettendo A e C in parallelo, e $(A \perp_p C) \perp_s B$ ottenuta interconnettendo in serie $A \perp_p C$ e B .

Siano $T_{A \perp_p C}$ e $T_{(A \perp_p C) \perp_s B}$ i tempi di vita delle due apparecchiature. Calcolare

(b.1) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{A \perp_p C}$.

(b.2) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{(A \perp_p C) \perp_s B}$.

(b.3) il valor medio di $T_{(A \perp_p C) \perp_s B}$.

Si ricorda che, per convenzione, una interconnessione in parallelo si considera guasta se entrambe le apparecchiature lo sono, mentre una interconnessione in serie si considera guasta se almeno una delle due apparecchiature lo è.

Esercizio 3

Ad un negozio A di componenti elettronici vengono richiesti, in media, 2 chip di tipo Σ ogni settimana. All'inizio di ogni settimana il negozio si rifornisce in modo da avere di scorta 2 chip del tipo Σ . Un altro negozio B dello stesso tipo, ma situato in un'altra zona della città, ha invece richieste di un solo chip di tipo Σ ogni settimana, ma come A mantiene una scorta di 2 chip del tipo Σ . Si supponga che il numero di richieste di chip Σ per settimana per i due negozi si possano modellare come due v.a. Poissoniane indipendenti e si calcoli

- la probabilità che in una settimana il negozio B perda almeno due vendite del chip Σ .
- la probabilità che in una settimana entrambi i negozi non perdano neppure una vendita del chip Σ .
- la probabilità che in una settimana entrambi i negozi perdano almeno una vendita ciascuno del chip Σ .
- Ad un certo punto i due negozi si uniscono in società e cooperano scambiandosi tra loro eventuali chip Σ quando uno dei due negozi lo necessita per non perdere una vendita e l'altro ne ha ancora. Sotto questa nuova ipotesi e mantenendo invariate tutte le altre, si effettui di nuovo il calcolo in (b).

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 4\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 4\pi$.

- Determinare le trasformate di Laplace (e relativi zone di esistenza) di $J(x)$ e delle funzioni $J(x)e^{\alpha x}$ al variare del parametro complesso α .
- Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \sin x$.
- Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-4\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-4\pi s})$$

- Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.2.3 Compito C**Esercizio 1**

- Sia X una v.a. di legge $N(2, 1)$. Calcolare $\mathbf{E}(3X + 2)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(X^3)$.
- Si dica quali delle seguenti funzioni, è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria:

$$f(x) = e^{-x^2} + 1 \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan 4x + \frac{1}{2}$$

- Si dimostri il teorema delle probabilità totali.

Esercizio 2

- (a) Si spieghi quando una variabile aleatoria è detta esponenziale di parametro λ e se ne calcoli esplicitamente il valor medio.
- (b) Si consideri poi il seguente problema: siano A , B e C tre apparecchiature con tempi di vita (durata prima del guasto), rispettivamente, T_A , T_B e T_C modellabili come variabili aleatorie esponenziali tra loro indipendenti di parametri uguali, rispettivamente, ad 2 per T_A , 3 per T_B e 1 per T_C . Si consideri l'apparecchiatura $A \perp_p C$ ottenuta interconnettendo A e C in parallelo, e $(A \perp_p C) \perp_s B$ ottenuta interconnettendo in serie $A \perp_p C$ e B .

Siano $T_{A \perp_p C}$ e $T_{(A \perp_p C) \perp_s B}$ i tempi di vita delle due apparecchiature. Calcolare

- (b.1) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{A \perp_p C}$.
- (b.2) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{(A \perp_p C) \perp_s B}$.
- (b.3) il valor medio di $T_{(A \perp_p C) \perp_s B}$.

Si ricorda che, per convenzione, una interconnessione in parallelo si considera guasta se entrambe le apparecchiature lo sono, mentre una interconnessione in serie si considera guasta se almeno una delle due apparecchiature lo è.

Esercizio 3

Ad un negozio A di componenti elettronici vengono richiesti, in media, 2 chip di tipo Σ ogni settimana. All'inizio di ogni settimana il negozio si rifornisce in modo da avere di scorta 2 chip del tipo Σ . Un altro negozio B dello stesso tipo, ma situato in un'altra zona della città, ha le stesse richieste di 2 chip di tipo Σ ogni settimana, e come A mantiene una scorta di 2 chip del tipo Σ . Si supponga che il numero di richieste di chip Σ per settimana per i due negozi si possano modellare come due v.a. Poissoniane indipendenti e si calcoli

- (a) la probabilità che in una settimana il negozio B perda esattamente una vendita del chip Σ .
- (b) la probabilità che in una settimana entrambi i negozi non perdano neppure una vendita del chip Σ .
- (c) la probabilità che in una settimana entrambi i negozi perdano almeno una vendita ciascuno del chip Σ .
- (d) Ad un certo punto i due negozi si uniscono in società e cooperano scambiandosi tra loro eventuali chip Σ quando uno dei due negozi lo necessita per non perdere una vendita e l'altro ne ha ancora. Sotto questa nuova ipotesi e mantenendo invariate tutte le altre, si effettui di nuovo il calcolo in (b).

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 6\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 6\pi$.

- (a) Determinare le trasformate di Laplace (e relativi zone di esistenza) di $J(x)$ e delle funzioni $J(x)e^{\alpha x}$ al variare del parametro complesso α .
- (b) Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \cos x$.

(c) Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-6\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-6\pi s})$$

(d) Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.2.4 Compito D

Esercizio 1

(a) Sia X una v.a. di legge $N(-2, 2)$. Calcolare $\mathbf{E}(2X + 3)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(X^3)$.

(b) Si dica quali delle seguenti funzioni, è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^6} \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan 3x + \frac{1}{2}$$

(c) Si dimostri che se X e Y sono v.a. discrete indipendenti, allora:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Esercizio 2

(a) Si spieghi quando una variabile aleatoria è detta esponenziale di parametro λ e se ne calcoli esplicitamente il valor medio.

(b) Si consideri poi il seguente problema: siano A , B e C tre apparecchiature con tempi di vita (durata prima del guasto), rispettivamente, T_A , T_B e T_C modellabili come variabili aleatorie esponenziali tra loro indipendenti di parametri uguali, rispettivamente, ad 2 per T_A , 1 per T_B e 3 per T_C . Si consideri l'apparecchiatura $A \perp_p B$ ottenuta interconnettendo A e B in parallelo, e $(A \perp_p B) \perp_s C$ ottenuta interconnettendo in serie $A \perp_p B$ e C .

Siano $T_{A \perp_p B}$ e $T_{(A \perp_p B) \perp_s C}$ i tempi di vita delle due apparecchiature. Calcolare

(b.1) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{A \perp_p B}$.

(b.2) la densità e la funzione di ripartizione di $T_{(A \perp_p B) \perp_s C}$.

(c.2) il valor medio di $T_{(A \perp_p B) \perp_s C}$.

Si ricorda che, per convenzione, una interconnessione in parallelo si considera guasta se entrambe le apparecchiature lo sono, mentre una interconnessione in serie si considera guasta se almeno una delle due apparecchiature lo è.

Esercizio 3

Ad un negozio A di componenti elettronici vengono richiesti, in media, 2 chip di tipo Σ ogni settimana. All'inizio di ogni settimana il negozio si rifornisce in modo da avere di scorta 2 chip del tipo Σ . Un altro negozio B dello stesso tipo, ma situato in un'altra zona della città, ha invece richieste di un solo chip di tipo Σ ogni settimana, ma come A mantiene una scorta di 2 chip del tipo Σ . Si supponga che il numero di richieste di chip Σ per settimana per i due negozi si possano modellare come due v.a. Poissoniane indipendenti e si calcoli

- la probabilità che in una settimana il negozio A perda almeno due vendite del chip Σ .
- la probabilità che in una settimana entrambi i negozi perdano esattamente una vendita ciascuno del chip Σ .
- la probabilità che in una settimana entrambi i negozi non perdano neppure una vendita del chip Σ .
- Ad un certo punto i due negozi si uniscono in società e cooperano scambiandosi tra loro eventuali chip Σ quando uno dei due negozi lo necessita per non perdere una vendita e l'altro ne ha ancora. Sotto questa nuova ipotesi e mantenendo invariate tutte le altre, si effettui di nuovo il calcolo in (c).

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 2\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 2\pi$.

- Determinare le trasformate di Laplace (e relativi zone di esistenza) di $J(x)$ e delle funzioni $J(x)e^{\alpha x}$ al variare del parametro complesso α .
- Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \sin x$.
- Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s})$$

- Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.3 Tema d'esame del 04/07/2000

1.3.1 Compito A

Esercizio 1

- Siano X e Y due v.a. indipendenti di legge, rispettivamente, $B(2, 1/3)$ e $Q(3)$. Calcolare $\mathbf{E}(X + Y)$ e $\mathbf{P}(X + Y = 0)$

(b) Quali delle seguenti sono densità di variabili aleatorie continue su \mathbf{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x > 0 \end{cases}$$

(c) Per quali valori a e b reali, la funzione $P(1) = a$, $P(2) = a + b$, $P(3) = 1 - 3a$, determina una probabilità sull'insieme $1, 2, 3$?

Esercizio 2

Un certo test eseguito con la macchina della verità è in grado di smascherare un mentitore con probabilità 0.9. Tuttavia può anche risultare falsamente positivo, erroneamente giudicando mentitore una persona che invece dice la verità, con probabilità 0.01. Viene scelta una persona a caso in un gruppo di 200 dove ve ne sono esattamente due che mentono e sottoposta al test.

- Calcolare la probabilità che tale persona sia giudicata un mentitore dal test.
- Calcolare la probabilità che la persona sia effettivamente un mentitore sapendo che il test risultato positivo.
- Supponendo che il test venga ripetuto, sulla stessa persona ed in condizioni di totale indipendenza per due volte, calcolare la probabilità che la persona sia effettivamente un mentitore sapendo che il test risultato positivo entrambe le volte.

Esercizio 3

Si dica come è definita una variabile aleatoria gaussiana di legge $N(\mu, \sigma^2)$ e se ne calcoli media e varianza. Si consideri poi una v.a. continua X di legge $N(-1, 2)$ e si risolvano i seguenti quesiti.

- Determinare a e b in \mathbf{R} tali che $aX + b$ abbia legge $N(0, 1)$.
- Calcolare $\mathbf{P}(X = -1)$ e $\mathbf{P}(X > -1)$.
- Calcolare $\mathbf{E}(X^2)$ e $Cov(X, X^2)$

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 2\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 2\pi$.

- Determinare le trasformate di Laplace (e relativi zone di esistenza) di $J(x)$ e delle funzioni $J(x)e^{\alpha x}$ al variare del parametro complesso α .
- Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \sin x$.
- Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-2\pi s})$$

- Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.3.2 Compito B

Esercizio 1

- (a) Siano X e Y due v.a. indipendenti di legge, rispettivamente, $B(2, 2/3)$ e $Q(2)$. Calcolare $\mathbf{E}(X + Y)$ e $\mathbf{P}(X + Y = 0)$
- (b) Quali delle seguenti sono densità di variabili aleatorie continue su \mathbf{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{2 + 2x} & x > 0 \end{cases}$$

- (c) Per quali valori a e b reali, la funzione $P(1) = a$, $P(2) = a - b$, $P(3) = 1 - 3a$, determina una probabilità sull'insieme $1, 2, 3$?

Esercizio 2

Un certo test eseguito con la macchina della verità è in grado di smascherare un mentitore con probabilità 0.9. Tuttavia può anche risultare falsamente positivo, erroneamente giudicando mentitore una persona che invece dice la verità, con probabilità 0.01. Viene scelta una persona a caso in un gruppo di 200 dove ve ne è esattamente una che mente e sottoposta al test.

- (a) Calcolare la probabilità che tale persona sia giudicata un mentitore dal test.
- (b) Calcolare la probabilità che la persona sia effettivamente un mentitore sapendo che il test risultato positivo.
- (c) Supponendo che il test venga ripetuto, sulla stessa persona ed in condizioni di totale indipendenza per due volte, calcolare la probabilità che la persona sia effettivamente un mentitore sapendo che il test risultato positivo entrambe le volte.

Esercizio 3

Si dica come è definita una variabile aleatoria gaussiana di legge $N(\mu, \sigma^2)$ e se ne calcoli media e varianza. Si consideri poi una v.a. continua X di legge $N(-1, 3)$ e si risolvano i seguenti quesiti.

- (a) Determinare a e b in \mathbf{R} tali che $aX + b$ abbia legge $N(0, 1)$.
- (b) Calcolare $\mathbf{P}(X = -1)$ e $\mathbf{P}(X > -1)$.
- (c) Calcolare $\mathbf{E}(X^2)$ e $Cov(X, X^2)$

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 4\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 4\pi$.

- (a) Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \sin x$.
- (b) Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-4\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-4\pi s})$$

- (c) Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

1.4 Tema d'esame del 25/07/2000**1.4.1 Compito A****Esercizio 1**

- (a) Siano X e Y due v.a. indipendenti Poissoniane di legge, rispettivamente, $Q(1)$ e $Q(3)$. Calcolare $\mathbf{P}(X + Y = 2)$
- (b) Si dica quali delle seguenti funzioni sono funzioni di ripartizione di variabili aleatorie:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/3 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x-2}{x^2-1} & x \geq 2 \end{cases}$$

- (c) Sia X una variabile aleatoria Gaussiana $N(-1, 2)$. Calcolare $\mathbf{E}(X^2)$ e $\mathbf{E}(X^3)$.

Esercizio 2

Si consideri un'urna contenente 6 palline nere, 3 rosse e una bianca. Si compiono, da detta urna, 5 estrazioni consecutive riimmettendo, ciascuna volta, la pallina estratta nell'urna.

- (a) Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, esattamente tre volte una pallina rossa.
- (b) Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, almeno tre volte una pallina rossa.
- (c) Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, esattamente, tre volte una pallina rossa, una volta una nera e una volta la bianca.
- (d) Si supponga ora di cambiare esperimento e di estrarre, sempre dalla stessa urna, due palline consecutivamente senza riimmissione. Calcolare la probabilità che siano entrambe rosse.
- (e) Calcolare la probabilità che siano una rossa e una bianca.

Esercizio 3

Si definisca il concetto di variabile aleatoria continua e di funzione di ripartizione. Si consideri poi una variabile aleatoria continua X con densità di probabilità data da

$$f_X(t) = \begin{cases} ate^{2t} & t \leq -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$$

Calcolare

- (a) a costante a .
- (b) la funzione di ripartizione di X .
- (c) $\mathbf{E}(X)$
- (d) la densità di $Y = X^2$.

Esercizio 4

- (a) Determinare le trasformate di Laplace (e relative zone di esistenza) delle funzioni definite su \mathbf{R}^+ :

$$f(t) = e^{-2t}, \quad g(t) = te^{-2t}$$

- (b) Determinare, al variare dei parametri reali a e b , la trasformata inversa di Laplace di

$$F(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{(\lambda + 2)^2}$$

- (c) Determinare la soluzione (per $t \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 1$.

1.5 Tema d'esame del 7/09/2000**1.5.1 Compito A****Esercizio 1**

- (a) Siano X e Y due v.a. indipendenti Binomiali di legge, rispettivamente, $B(4, 1/3)$ e $B(3, 1/3)$. Calcolare $\mathbf{P}(X + Y = 4)$
- (b) Si dica quali delle seguenti funzioni sono funzioni di ripartizione di variabili aleatorie:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 2/3 & -1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^4}{x^4 + 1} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (c) Siano X e Y due variabili aleatorie Gaussiane indipendenti di leggi, rispettivamente, $N(-1, 2)$ e $N(1, 2)$. Calcolare $\mathbf{E}((aX + bY)^2)$ al variare dei parametri reali a e b .

Esercizio 2

Si enunci e si dimostri il Teorema di Bayes. Si risolva poi il seguente esercizio.

Tre monete apparentemente uguali presentano in realtà, a causa di diversità nella loro struttura interna, differenti comportamenti al lancio. Da un'indagine statistica si è dedotto che mentre per una delle monete la probabilità di ottenere testa è uguale ad $1/2$, per le altre due tale probabilità è uguale, rispettivamente, ad $1/3$ e $2/3$. Si sceglie a caso una delle tre monete e la si lancia per 3 volte consecutive.

- (a) Calcolare la probabilità di ottenere, rispettivamente, 0, 1, 2, 3 teste nei 3 lanci.
- (b) Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta con probabilità di testa $2/3$, sapendo di aver ottenuto 2 teste nei 3 lanci. Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta con probabilità di testa $1/2$, sapendo di aver ottenuto 2 teste nei 3 lanci.
- (c) Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta con probabilità di testa $1/2$, sapendo di aver ottenuto 2 teste nei 3 lanci.

Esercizio 3

Il tempo di durata di un certo componente è modellizzato da una variabile aleatoria continua X di funzione di ripartizione:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t^2} & t \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare

- (a) la densità di X
- (b) $\mathbf{E}(X)$
- (c) $\mathbf{P}(X \leq t + 1 | X > t)$
- (d) Si studi infine l'espressione al punto (c) come funzione di $t \in [0, +\infty[$ e se ne disegni un grafico approssimativo.

Esercizio 4

- (a) Determinare le trasformate di Laplace (e relative zone di esistenza) delle funzioni definite su \mathbf{R}^+ :

$$f(t) = e^{-4t}, \quad g(t) = te^{-4t}$$

- (b) Determinare, al variare dei parametri reali a e b , la trasformata inversa di Laplace di

$$F(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{(\lambda + 4)^2}$$

- (c) Determinare la soluzione (per $t \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 4y(t) = e^{-4t} + 1$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = -1$.

1.6 Tema d'esame del 19/09/2000

1.6.1 Compito B

Esercizio 1

- Disegnare la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria che ha legge $B(2, 1/4)$.
- Sia X una variabile aleatoria Gaussiana di legge $N(-2, 1)$. Calcolare $\mathbf{E}(X^2)$ e $\mathbf{E}(X^3)$.
- Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti di legge Poissoniana, rispettivamente, $Q(1)$ e $Q(2)$, si calcoli $\mathbf{P}(X + Y \leq 1)$.

Esercizio 2

Una variabile aleatoria continua X ha densità di probabilità data da $f(x) = a(1 + 9x^2)^{-1}$ per $-1 \leq x \leq 1$ e $f(x) = 0$ al di fuori. Determinare

- il parametro $a > 0$
- la funzione di ripartizione di X e tracciarne un grafico qualitativo.
- la media e la varianza di X
- la funzione di ripartizione e la densità di $Y = X^2$

Esercizio 3

Si enunci e si dimostri il teorema di Bayes. Si risolva poi il seguente problema: vi sono tre dadi a sei faccie, due normali con i numeri da 1 a 6 sulle sei faccie ed uno truccato con il numero 1 su due faccie, il numero 3 su tre faccie ed il numero 5 sulla rimanente faccia. Si sceglie a caso un dado, senza poter vedere se è quello truccato, e lo si lancia due volte. Calcolare

- la probabilità che nei due lanci si ottenga due volte il numero 3
- la probabilità che la somma dei risultati ottenuti nei due lanci sia uguale a 6. la probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che nei due lanci si è ottenuto due volte il numero 3.
 - (d) la probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che la somma dei risultati ottenuti nei due lanci è stata uguale a 6.
- la probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che nei due lanci si è ottenuto due volte il numero 3.
- la probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che la somma dei risultati ottenuti nei due lanci è stata uguale a 6.

Esercizio 4

Sia $J : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $J(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 4\pi$ e $J(x) = 0$ se $x > 4\pi$.

- (a) Determinare le trasformate di Laplace (e relativi zone di esistenza) di $J(x)$ e delle funzioni $J(x)e^{\alpha x}$ al variare del parametro complesso α .
- (b) Determinare la trasformata di Laplace di $J(x) \sin x$.
- (c) Determinare la trasformata inversa di Laplace delle funzioni

$$\frac{1}{s^2 + 1}(1 - e^{-4\pi s}) \quad \frac{s}{s^2 + 1}(1 - e^{-4\pi s})$$

- (d) Determinare la soluzione (per $x \geq 0$) dell'equazione differenziale

$$y' + y = J(x) \sin(x)$$

corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 0$.

CAPITOLO 2

Anno accademico 00/01

2.1 Tema d'esame del 28/03/01

2.1.1 Compito A

Si enunci e si dimostri il teorema delle probabilità totali. Si risolva poi il seguente problema:

In un'urna vi sono 5 monete: 3 sono normali (tipo a) con testa e croce sulle due faccie e perfettamente equilibrate, 2 hanno invece testa sulle due faccie (tipo b) e una ha croce sulle due faccie (tipo c). Si estraggono simultaneamente due monete dall'urna e si lanciano entrambe.

Esercizio 1

- (a) Calcolare la probabilità che le due monete estratte siano di tipo: aa, bb, cc, ab, ac, bc .
- (b) Calcolare la probabilità di ottenere una testa e una croce.
- (c) Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo aa sapendo che si è ottenuto una testa e una croce.
- (d) Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo bc sapendo che si è ottenuto una testa e una croce.

Esercizio 2

Sia T la durata della vita, misurata in centinaia di anni. Supponiamo che in una data popolazione la densità di probabilità di T sia

$$f(t) = \begin{cases} 12t^2(1-t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Trovare la durata media della vita, e la sua varianza.
- (b) Calcolare il rischio di morte all'istante t , dove si ricorda che la funzione di rischio è definita come $R(t) = f(t)/[1 - F(t)]$, essendo F la funzione di ripartizione.
- (c) Trovare la probabilità che una persona muoia tra i 70 e gli 80 anni, sapendo che è vissuta fino a 70 anni.

- (d) Dato un campione di n individui, dire a quale variabile casuale tende, per $n \rightarrow +\infty$, la variabile aleatoria $n^{-1} \sum_{i=1}^n T_i$, essendo T_i la variabile aleatoria che descrive la durata della vita dell' i -esima persona ($i = 1, \dots, n$).

Esercizio 3

Scrivere la formula risolutiva generale dell'equazione differenziale su $[0, +\infty[$

$$y''' + 4y' = f$$

dove $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ è continua a tratti. Determinare poi la soluzione \bar{y} per $f = I_{[0, \pi]}$ e per una qualunque condizione iniziale. Infine determinare le condizioni iniziali per le quali $\bar{y}(x) = 0$ per ogni $x \geq \pi$ e si disegni la \bar{y} così determinata.

2.2 Tema d'esame del 03/04/01

2.2.1 Compito A

Esercizio 1

Un dispositivo per la ricerca automatica delle linee telefoniche effettua la ricerca tra tre linee A, B, C, ogni volta in maniera casuale e indipendente dalle volte precedenti. La linea A è perfettamente funzionante, mentre le linee B e C sono difettose, con probabilità p_1 e p_2 , rispettivamente, di non funzionare.

- Se si effettua una prova, qual'è la probabilità di ottenere la comunicazione?
- Se si effettuano tre prove, qual'è la probabilità di ottenere la comunicazione tutte e tre le volte?
- Sempre effettuando tre prove, qual'è la probabilità di ottenere la comunicazione almeno una volta?
- Se nelle tre prove si ottiene sempre la comunicazione, qual'è la probabilità che il dispositivo abbia scelto sempre la linea A?
- Se $p_1 + p_2 = 1.9$, qual'è il numero minimo di prove che garantisce una probabilità almeno del 95% di ottenere la comunicazione almeno una volta?

Esercizio 2

Si definisca una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ e se ne dimostri l'assenza di memoria. Si svolga poi il seguente esercizio:

Due fabbriche A e B producono uno stesso tipo di transistor. Il tempo di durata (in migliaia di ore) di ognuno di questi transistor è modellabile come una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 se è prodotto da A, di parametro 2 invece se è prodotto da B. Si sceglie a caso un transistor senza sapere da che fabbrica proviene e si testa il suo tempo di durata indicato T .

- Calcolare $\mathbf{P}(T \leq t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.
- Calcolare la densità di T ed il suo valor medio.
- Calcolare la propensione al guasto $R(t) = f(t)/[1 - F(t)]$ (dove F la funzione di ripartizione e f la densità di T) e se ne tracci un grafico qualitativo.

Esercizio 3

Scrivere la formula risolutiva generale dell'equazione differenziale su $[0, +\infty[$

$$y''' + 3y'' + 2y' = f$$

dove $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ è continua a tratti. Determinare poi la soluzione \bar{y} per $f = I_{[0,1]}$ e per una qualunque condizione iniziale. Infine determinare le condizioni iniziali per le quali $\bar{y}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

2.3 Tema d'esame del 25/07/01**2.3.1 Compito A****Esercizio 1**

Si introduca la distribuzione binomiale e se ne discutano le principali proprietà. Si dica poi quali leggi di probabilità possono essere usate, in determinate circostanze, per approssimare la distribuzione binomiale.

Risolvere poi il seguente esercizio: un contadino possiede galline ovaiole di due razze diverse, diciamo di tipo A e di tipo B. La probabilità che una gallina di tipo A faccia un uovo in un fissato giorno è pari a 0.5, mentre tale probabilità vale 0.3 per una gallina di tipo B. Supponiamo che il contadino possieda 100 galline di tipo A e 200 galline di tipo B.

- Calcolare la probabilità che una gallina scelta a caso faccia un uovo in un fissato giorno.
- Calcolare la probabilità che una gallina che fa un uovo in un fissato giorno sia di tipo B.
- Determinare *in modo approssimato* la legge del numero totale di uova prodotte dalla totalità delle galline in un fissato giorno.

Esercizio 2

Un'azienda produce sferette di metallo il cui raggio R ha legge di probabilità uniforme nell'intervallo $(0, [4\pi/3]^{1/3})$.

- Determinare la legge di probabilità del volume V delle sferette.
- Determinare media e varianza di V .
- Calcolare la probabilità che una sferetta abbia volume minore della metà del volume medio.
- Supponiamo di avere un lotto di 1000 sferette. Lo si considera inaccettabile se più del 10% delle sferette ha volume inferiore alla metà del volume medio. Stimare la probabilità che ciò accada.

Esercizio 3

Scrivere la formula risolutiva generale dell'equazione differenziale su $[0, +\infty[$

$$y'' + y' + y = f$$

dove $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ è continua a tratti. Determinare poi la soluzione \bar{y} per $f = I_{[0,1]}$ e condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

2.4 Tema d'esame del 19/09/01

2.4.1 Compito A

Esercizio 1

In un'urna vi sono 6 monete: 3 sono normali (tipo a) con testa e croce sulle due faccie e perfettamente equilibrate, 2 hanno invece testa sulle due faccie (tipo b) e una ha croce sulle due faccie (tipo c). Si estraggono simultaneamente due monete dall'urna e si lanciano entrambe.

- (a) Calcolare la probabilità che le due monete estratte siano di tipo: aa, bb, cc, ab, ac, bc .
- (b) Calcolare la probabilità di ottenere due teste.
- (c) Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo aa sapendo che si è ottenuto due teste.
- (d) Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo bb sapendo che si è ottenuto due teste.

Esercizio 2

Si definisca una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ e se ne dimostri l'assenza di memoria. Si svolga poi il seguente esercizio:

Due fabbriche A e B producono uno stesso tipo di transistor. Il tempo di durata (in migliaia di ore) di ognuno di questi transistor è modellabile come una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 se è prodotto da A , di parametro 2 invece se è prodotto da B . Si sceglie a caso un transistor senza sapere da che fabbrica proviene e si testa il suo tempo di durata indicato T .

- (a) Calcolare $\mathbf{P}(T \leq t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.
- (b) Calcolare la densità di T ed il suo valor medio.
- (c) Calcolare la propensione al guasto $R(t) = f(t)/[1 - F(t)]$ (dove F la funzione di ripartizione e f la densità di T) e se ne tracci un grafico qualitativo.

Esercizio 3

Scrivere la formula risolutiva generale dell'equazione differenziale su $[0, +\infty[$

$$y'' + 2y' + 2y = f$$

dove $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ è continua a tratti. Determinare poi la soluzione \bar{y} per $f = I_{[0,2]}$ e condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

CAPITOLO 3

Anno accademico 01/02

3.1 Tema d'esame del 09/07/02

3.1.1 Compito A

Esercizio 1

(a) Si enunci e si dimostri la legge dei grandi numeri.

(b) Sia X una v.a. di legge

$$P_X(x) = \frac{1}{3}I_{\{-1\}}(x) + \frac{2}{3}I_{\{1\}}(x)$$

Calcolare $E(X^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sia $X \sim G(1/5)$. Calcolare $P(3/2 < X < 7/2)$.

Esercizio 2

Due punti A e B sono collegati tra loro da due canali di comunicazione, uno per trasmettere da A verso B , l'altro per trasmettere da B verso A . Su tali canali vengono inviati simboli binari 0 o 1 e la probabilità di commettere un errore spedendo un simbolo è, per entrambi i canali, $1/8$. A sceglie un simbolo $\omega \in \{0, 1\}$ e lo invia verso B attraverso il primo canale. Il simbolo ricevuto da B , ω_B , viene rinviato ad A attraverso il secondo canale. Se il simbolo ricevuto da A , ω_A , non coincide con ω , A trasmette ω di nuovo; in caso contrario A passerà a trasmettere un nuovo simbolo.

(a) Calcolare la probabilità che ω_A sia eguale ad ω .

(b) Calcolare la probabilità che ω_B sia eguale ad ω sapendo che ω_A è eguale ad ω .

(c) Calcolare il valor medio di trasmissioni complessive sui due canali per trasmettere un simbolo secondo la procedura illustrata sopra.

Esercizio 3

Il ritardo in ore di un certo treno giornaliero tra due località A e B è modellato da una v.a. continua X di densità:

$$f_X(t) = \begin{cases} c & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ c(4-t) & \text{se } 3 < t \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Calcolare c .
- Calcolare $P(X \geq 2)$.
- Calcolare il valor medio di X .
- Calcolare la probabilità che in una settimana quel treno abbia, per almeno due giorni, almeno 2 ore di ritardo (si suppongano tra loro indipendenti le v.a. che modellano il ritardo nei vari giorni e tutte con la stessa legge della X).

Esercizio 4

Si considerino le funzioni

$$f_n(t) = (\sin nt)I_{[0,2\pi[}(t), \quad g_n(t) = (\cos nt)I_{[0,2\pi[}(t)$$

- Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le trasformate di Laplace delle funzioni $f_n(t)$, $g_n(t)$ e $f_n(t)g_n(t)$, specificandone il semipiano di esistenza.
- Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$\phi(\lambda) = \frac{3\lambda + 1}{\lambda^2 + 4}(1 - e^{-2\pi\lambda})$$

3.2 Tema d'esame del 09/07/02**3.2.1 Compito C****Esercizio 1**

- Si enunci e si dimostri la legge dei grandi numeri.
- Sia X una v.a. di legge

$$P_X(x) = \frac{1}{5}I_{\{-1\}}(x) + \frac{4}{5}I_{\{1\}}(x)$$

Calcolare $E(X^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Sia $X \sim G(1/4)$. Calcolare $P(3/2 < X < 7/2)$.

Esercizio 2

Due punti A e B sono collegati tra loro da due canali di comunicazione, uno per trasmettere da A verso B , l'altro per trasmettere da B verso A . Su tali canali vengono inviati simboli binari 0 o 1 e la probabilità di commettere un errore spedendo un simbolo è, per entrambi i canali, $1/7$. A sceglie un simbolo $\omega \in \{0, 1\}$ e lo invia verso B attraverso il primo canale. Il simbolo ricevuto da B , ω_B , viene rinviato ad A attraverso il secondo canale. Se il simbolo ricevuto da A , ω_A , non coincide con ω , A trasmette ω di nuovo; in caso contrario A passerà a trasmettere un nuovo simbolo.

- Calcolare la probabilità che ω_A sia eguale ad ω .
- Calcolare la probabilità che ω_B sia eguale ad ω sapendo che ω_A è eguale ad ω .
- Calcolare il valor medio di trasmissioni complessive sui due canali per trasmettere un simbolo secondo la procedura illustrata sopra.

Esercizio 3

Il ritardo in ore di un certo treno giornaliero tra due località A e B è modellato da una v.a. continua X di densità:

$$f_X(t) = \begin{cases} c & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{c}{2}(4-t) & \text{se } 2 < t \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Calcolare c .
- Calcolare $P(X \geq 2)$.
- Calcolare il valor medio di X .
- Calcolare la probabilità che in una settimana quel treno abbia, per almeno due giorni, almeno 2 ore di ritardo (si suppongano tra loro indipendenti le v.a. che modellano il ritardo nei vari giorni e tutte con la stessa legge della X).

Esercizio 4

Si considerino le funzioni

$$f_n(t) = (\sin nt)I_{[0, 2\pi[}(t), \quad g_n(t) = (\cos nt)I_{[0, 2\pi[}(t)$$

- Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le trasformate di Laplace delle funzioni $f_n(t)$, $g_n(t)$ e $f_n(t)g_n(t)$, specificandone il semipiano di esistenza
- Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$\phi(\lambda) = \frac{3\lambda + 1}{\lambda^2 + 9}(1 - e^{-2\pi\lambda})$$

3.3 Tema d'esame del 16/07/02

3.3.1 Compito C

Esercizio 1

- (a) Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Dimostrare che $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$, $\text{Var}(X) = \lambda^{-2}$
- (b) Sia $X \sim N(-2, 3)$. Calcolare $\text{Var}(2X - 4)$.
- (c) Sia X una v.a. di legge

$$P_X(x) = \frac{1}{7}I_{\{0\}} + \frac{1}{7}I_{\{1\}} + \frac{5}{7}I_{\{-1\}}$$

Calcolare $E(X^6)$.

Esercizio 2

Il numero di guasti di una certa apparecchiatura in un anno può essere modellato come una v.a. X di legge $P(8/3)$. Si deve decidere tra due possibili contratti di manutenzione: il contratto A prevede un pagamento forfettario annuo di 150 euro che copre gratuitamente il primo intervento di riparazione mentre gli altri vengono pagati ad un prezzo fisso di 70 euro ciascuno. Il contratto B invece non prevede alcun canone annuo ed ogni intervento si paga 120 euro. Siano X_A e X_B le v.a. che conteggiano la somma spesa annua secondo i due diversi contratti A e B .

- (a) Calcolare il valor medio di X_A e X_B .
- (b) Calcolare la probabilità che $X_A > X_B$.
- (c) Supponendo uniforme nel tempo la distribuzione dei guasti di modo da poter modellare il numero di guasti in tempo t (in anni) come una v.a. X_t di legge $P(8t/3)$, calcolare la probabilità che $X_A > X_B$ sapendo che nei primi sei mesi dell'anno ($t = 1/2$) non ci sono stati guasti.

Esercizio 3

Un dispositivo elettronico ha una durata di vita (in migliaia di ore) modellabile come una v.a. continua X di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{se } 0 \leq x \leq 0.5 \\ ce^{-4x} & \text{se } x > 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare c .
- (b) Calcolare $\mathbf{P}(X \leq 0.5)$.
- (c) Calcolare $\mathbf{P}(X \leq 1 | X \geq 0.5)$.
- (d) Stimare la probabilità che su 100 di questi dispositivi scelti a caso, almeno 10 abbiano una durata di vita superiore a 500 ore.

Esercizio 4

Data l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = u(t)$$

- (a) Trovare la formula risolutiva generale in funzione di $u(t)$ e delle condizioni iniziali.
- (b) Determinare la soluzione esplicita nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $u(t) = e^{-2t}$.

3.4 Tema d'esame del 11/09/02**Esercizio 1**

Enunciare e dimostrare il teorema delle probabilità totali.

- (a) Sia $X \sim N(-1, 3)$. Calcolare $\mathbb{E}(X^3)$.
- (b) Consideriamo due v.a. $X \sim \text{Ber}(p_1)$ e $Y \sim \text{Ber}(p_2)$ indipendenti. Calcolare $P_{X+Y}(1)$.

Esercizio 2

Due fabbriche A e B producono uno stesso tipo di transistor. Il tempo di durata (in migliaia di ore) di ognuno di questi transistor è modellabile come una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1 se è prodotto da A , di parametro 2 invece se è prodotto da B . Si sceglie a caso un transistor senza sapere da che fabbrica proviene e si testa il suo tempo di durata indicato T .

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione di T .
- (b) Calcolare la densità di T ed il suo valor medio.

Esercizio 3

In un'urna vi sono 6 monete: 3 sono normali (tipo a) con testa e croce sulle due faccie e perfettamente equilibrate, 2 hanno invece testa sulle due faccie (tipo b) e una ha croce sulle due faccie (tipo c). Si estraggono simultaneamente due monete dall'urna e si lanciano entrambe.

- (a) Calcolare la probabilità che le due monete estratte siano di tipo: aa, bb, cc, ab, ac, bc .
- (b) Calcolare la probabilità di ottenere due teste.
- (c) Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo aa sapendo che si è ottenuto due teste.
- (d) Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo bb sapendo che si è ottenuto due teste.

Esercizio 4

Si considerino le funzioni

$$f_n(t) = (\sin nt)I_{[0,2\pi[}(t), \quad g_n(t) = (\cos nt)I_{[0,2\pi[}(t)$$

- (a) Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le trasformate di Laplace delle funzioni $f_n(t)$, $g_n(t)$ e $f_n(t)g_n(t)$, specificandone il semipiano di esistenza .
- (b) Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$\phi(\lambda) = \frac{-2\lambda + 4}{\lambda^2 + 4}(1 - e^{-2\pi\lambda})$$

3.5 Tema d'esame del 19/09/02**Esercizio 1**

- (a) Sia $X \sim G(p)$. Dimostrare che $\mathbb{E}(X) = 1/p$ e $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$
- (b) Sia $X \sim \text{Exp}(3)$. Calcolare $\mathbb{E}(X^2)$.
- (c) Se $f(t)$ è una funzione di classe C^1 che ha trasformata di Laplace $\hat{f}(\lambda)$, quale è la trasformata di Laplace di $f'(t)e^{-4t}$.

Esercizio 2

Si consideri un'urna contenente 4 palline nere, 3 rosse e una bianca. Si compiono, da detta urna, 3 estrazioni consecutive. Calcolare, nei due casi con riimmissione e senza riimmissione, la probabilità di

- (a) estrarre tre volte una pallina nera.
- (b) estrarre palline di tre colori distinti.

Esercizio 3

Un dispositivo elettronico ha una durata di vita (in migliaia di ore) modellabile come una v.a. continua X di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ ce^{-2x} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare c .
- (b) Calcolare $\mathbf{P}(X \leq 1)$.
- (c) Calcolare $\mathbf{P}(X \leq 2 | X \geq 1)$.
- (d) Stimare la probabilità che su 100 di questi dispositivi scelti a caso, almeno 10 abbiano una durata di vita superiore a 1000 ore.

Esercizio 4

Data l'equazione differenziale:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = u(t)$$

- (a) Trovare la formula risolutiva generale in funzione di $u(t)$ e delle condizioni iniziali.
- (b) Determinare la soluzione esplicita nel caso in cui $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $u(t) = e^{-\nu t}$ al variare di ν parametro reale.

CAPITOLO 4

Anno accademico 02/03

4.1 Tema d'esame del 4/07/05

4.1.1 Compito

Esercizio 1

Un modello differenziale è descritto dalla seguente relazione:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t)$$

trovare la funzione di trasferimento del modello e la risposta forzata all'ingresso

$$f(t) = u(t)e^t$$

Esercizio 2

Un'agenzia vende biglietti di concerti per telefono. Si assume che una persona rinunci ad acquistare un biglietto dopo tre tentativi non andati a buon fine. Si vuole essere sicuri di servire almeno il 95% delle persone che chiamano. Sia p la probabilità che un cliente che chiama l'agenzia trovi la linea libera.

- Dire qual è il minimo valore di p necessario per realizzare l'obiettivo.
- Si supponga che ogni operatore dell'agenzia sia disponibile a rispondere a una chiamata con probabilità 0.2. Dire qual è il numero minimo di operatori che è necessario assumere per raggiungere l'obiettivo fissato.

4.2 Tema d'esame del 11/07/03

4.2.1 Compito B

Esercizio 1

Si assume che nella rilevazione di un segnale digitale il rumore di fondo segua una distribuzione normale con media 0 Volt e deviazione standard 0.3 Volt.

- (a) Se il sistema assume che sia stato trasmesso un segnale “uno” quando vengono superati gli 0.8 Volt, qual è la probabilità p_1 di rilevare un “uno” quando non è stato trasmesso?
- (b) Si supponga che il segnale “uno” sia rappresentato da uno spostamento di +1.6 Volt della media della distribuzione di probabilità del rumore. Qual è la probabilità p_2 che il segnale “uno” non venga rilevato pur essendo stato trasmesso?

Esercizio 2

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$f(t) = e^{-2|t-3|}$$

4.3 Tema d'esame del 17/07/03

4.3.1 Compito A

Esercizio 1

Il numero di accessi a una base dati durante un intervallo di tempo di 10 secondi è una variabile aleatoria di Poisson con valore atteso uguale a 5 accessi.

- (a) Qual è la probabilità p_1 che non si verifichi alcun accesso nel corso di 10 secondi?
- (b) Qual è la probabilità p_2 che ci siano almeno due accessi nel corso di due secondi?
- (c) Qual è il più piccolo intervallo di tempo tale che la probabilità che in quell'intervallo ci sia almeno un accesso è maggiore del 50%?

Esercizio 2

Un modello differenziale è descritto dalla seguente relazione:

$$y'' + 3y' + 2y = 5f^{prime}(t)$$

- (a) Si determinino la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva.
- (b) Si determinini inoltre la risposta forzata all'ingresso

$$f(t) = u(t)$$

con condizioni iniziali

$$y(0_-) = 5 \quad y'(0_-) = 1$$

CAPITOLO 5

Anno accademico 03/04

5.1 Tema d'esame del 29/06/04

Esercizio 1

In una certa ditta vengono prodotti cappelli di due tipi: bombette e baschi, nei colori nero e blu. Le bombette costituiscono $1/3$ della produzione e di queste $2/5$ sono blu. Per quanto riguarda invece i baschi, si sa che $1/10$ di essi sono di colore blu.

- (a) Qual è la probabilità che un cappello scelto a caso sia blu?
- (b) Qual è la probabilità che se un cappello scelto a caso è blu, allora sia una bombetta?
- (c) Qual è la probabilità che su 8 cappelli scelti a caso almeno 2 siano blu?
- (d) Qual è, approssimativamente, la probabilità che su 100 cappelli scelti a caso quelli blu siano non più di 19?

Esercizio 2

Un apparecchio è costituito da due elementi A e B disposti in serie. Supponiamo che A e B non siano soggetti a usura e che i loro tempi di vita (in anni) abbiano leggi esponenziali di parametri rispettivamente 5 e 1.

- (a) Qual è la legge del tempo di vita dell'apparecchio? Quanto tempo vive in media l'apparecchio?
- (b) Supponiamo che sia possibile sostituire l'elemento A, con n elementi ad esso identici disposti in parallelo. Qual è la legge del tempo di vita del nuovo apparecchio?
- (c) Quanti elementi è necessario utilizzare affinché la probabilità che l'apparecchio viva più di 6 mesi sia 0.55?

Esercizio 3

- (a) Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy utilizzando le trasformate di Laplace

$$\begin{cases} x'' - 4x = u(t - 3) \\ x(0) = 0 \\ x' = 6 \end{cases}$$

- (b) Si tracci un grafico qualitativo della soluzione ottenuta

5.2 Tema d'esame del 9/07/04**5.2.1 Compito A****Esercizio 1**

Una compagnia di assicurazione suddivide i guidatori d'auto in tre classi: A, B e C. La probabilità che un guidatore di classe A abbia, nel corso di un anno, almeno un incidente, è del 2%. Le corrispondenti probabilità per le classi B e C sono del 4% e del 5% rispettivamente. I clienti della compagnia sono così ripartiti: il 40% appartiene alla classe A, il 40% alla classe B e il 20% alla classe C.

- (a) Qual è la probabilità che un cliente abbia almeno un incidente nel corso di un anno?
(b) Qual è la probabilità che un cliente non abbia incidenti nel corso di 2 anni?
(c) Un cliente non ha incidenti nel corso di 2 anni. Qual è la probabilità che appartenga alla classe A?

(L'ipotesi di indipendenza per incidenza in anni diversi è valida soltanto per i quali la classe di appartenenza è nota).

Esercizio 2

La variabile aleatoria che descrive il numero di telefonate orarie ad un centralino ha densità di Poisson di parametro $\lambda = 5$. Supporremo indipendenti le telefonate che arrivano in ore diverse.

- (a) Calcolare le probabilità che nelle prime 12 ore non arrivi alcuna telefonata
(b) Se nelle prime 6 ore non è arrivata alcuna telefonata, qual è la probabilità che non ne arrivi alcuna anche nelle 6 ore successive?
(c) Qual è la probabilità che la prima telefonata arrivi nelle prime 12 ore sapendo che arriva esattamente una telefonata nel primo giorno?

Esercizio 3

Si scommette sull'uscita di testa nel lancio di una moneta. La moneta non è equilibrata e la probabilità di uscita di testa è $p = 36/61$

- (a) Qual è approssimativamente la probabilità di perdere meno di 50 volte in 100 lanci?
(b) Qual è approssimativamente il numero minimo di lanci che si devono effettuare affinché la probabilità di avere almeno 100 successi sia maggiore del 90%?

Esercizio 4

Risolvere, usando la trasformata di Laplace, il seguente problema di Cauchy:

$$y''(t) + 4y(t) = H(t-3)e^{-4t}, \quad y(0) = 5 \quad y'(0) = 0$$

dove $H(t)$ indica la funzione di Heaviside.

5.3 Tema d'esame del 19/07/04**Esercizio 1**

In un barattolo ci sono 10 caramelle alla menta e 25 al limone.

- Giovanni e Marco prendono contemporaneamente rispettivamente tre e una caramella. Qual è la probabilità che ne trovino 3 alla menta e una al limone?
- Se Marco ha preso la caramella prima di Giovanni e l'ha trovata alla menta, qual è la probabilità che poi Giovanni prenda tre caramelle, tutte e tre al limone?
- Effettivamente Marco ha estratto una caramella alla menta e Giovanni ne ha estratte tre al limone. Ma Marco vuole proprio anche lui una caramella al limone. Dunque, senza rimettere la caramella nel barattolo, riprova fino a che non trova una caramella al limone. Qual è la probabilità che trovi una caramella al limone entro il terzo tentativo?

Esercizio 2

Una fabbrica produce tavolette di cioccolato su due linee produttive A e B. La linea A produce l' 80 per cento delle tavolette, mentre la linea B il restante 20 per cento. I pesi delle tavolette di entrambe le linee seguono leggi normali di media 200 grammi, ma di deviazioni standard diverse: rispettivamente 10 grammi e 20 grammi. Sulle tavolette viene fatto un controllo di qualità per cui vengono scartate quelle di peso inferiore ai 187 grammi.

- Qual è la probabilità che una tavoletta non superi il controllo di qualità?
- Qual è la probabilità che una tavoletta che non supera il controllo di qualità provenga dalla linea A?
- Supponiamo che sia possibile modificare la deviazione standard del peso delle tavolette prodotte dalla linea B. Quale dovrebbe essere la deviazione standard del peso delle tavolette della linea B affinché la probabilità che una tavoletta scelta a caso superi il controllo di qualità sia dell' 84 per cento?

Esercizio 3

- Disegnare il segnale $f(t) = (3-t)[u(t) - u(t-3)]$ e calcolarne la trasformata di Laplace.
- Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$x''' + 4x' = f(t), \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 0.$$

5.4 Tema d'esame del 13/09/04

Esercizio 1

Corrado è un venditore ambulante di sigarette di contrabbando. Una notte si sistema al semaforo di corso Francia e offre a tutti gli automobilisti che si fermano le sigarette. È risaputo che il 75 per cento degli automobilisti sono fumatori. Un terzo di questi si oppongono ai traffici illeciti per cui non comprano sigarette di contrabbando, mentre gli altri non perdono occasione di comprare le sigarette a basso prezzo, anche se provenienti da traffici illeciti.

- Qual è la probabilità che un automobilista a caso compri le sigarette?
- Qual è la probabilità che il primo automobilista a comprare le sigarette sia il quinto a fermarsi al semaforo?
- Se nella notte si fermano al semaforo 400 automobilisti, qual è la probabilità che Corrado sia riuscito a vendere a più di 190 automobilisti?

Esercizio 2

Sia T la variabile aleatoria che descrive il tempo di vita (in anni) di un apparecchio e sia la sua densità $f_T(t)$ una funzione della forma:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{c}{5}t & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ -\frac{c}{10}(t-15) & \text{se } 5 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{se } t \geq 15, \end{cases}$$

dove c è un numero reale.

- Determinare c in modo che $f_T(t)$ sia effettivamente una densità di probabilità.
- Determinare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria T .
- Calcolare la probabilità che, se l'apparecchio ha già vissuto 5 anni, allora viva più di 8 anni.
- L' apparecchio è soggetto a usura? (Motivare la risposta.)

Esercizio 3

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''' + 2x'' - 7x' + 4x = \delta(t-1) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \\ x''(0) = 3. \end{cases}$$