

Politecnico di Torino
II Facoltà di Ingegneria - sede di Vercelli

Esercizi per il corso di Metodi Matematici e Statistici

Per gli allievi in Ingegneria Elettronica ed Informatica

Testi a.a. 04-05

Mariagrazia Graziano

28 aprile 2005

Copyright

Copyright (c) 2005 Mariagrazia Graziano.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being Copyright, with the Front-Cover Texts being Esercizi per il corso di Metodi Matematici e Statistici per gli allievi in Ingegneria Elettronica e Informatica, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled GNU Free Documentation License.

CAPITOLO 1

Descrizione di funzioni attraverso le distribuzioni e uso della delta di Dirac

Esercizio 1

Si scriva l'espressione della funzione porta p_T (indicatrice) attraverso l'uso della funzione gradino u_T (Heaviside) e se ne ricavi la derivata prima.

Esercizio 2

Sia data la funzione $f(t) = \frac{1}{2} u(t) t^2$. Calcolare $f'(t)$, $f''(t)$ e $f'''(t)$, tracciandone man mano i grafici. Utilizzando quindi le regole di derivazione delle distribuzioni e le proprietà della delta di Dirac si ricavino algebricamente le stesse derivate. Che cosa succede se la funzione diventa $g(t) = \frac{1}{2} u(t-2) t^2$?

Esercizio 3

Sia data la funzione in figura 1.1. La si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavi la derivata prima.

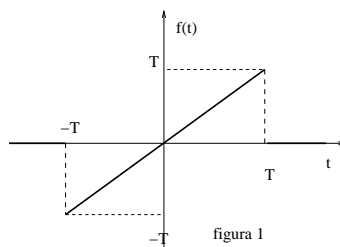


Figura 1.1:

Esercizio 4

Sia data la funzione in figura 1.2. La si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavino le derivate prima e seconda.

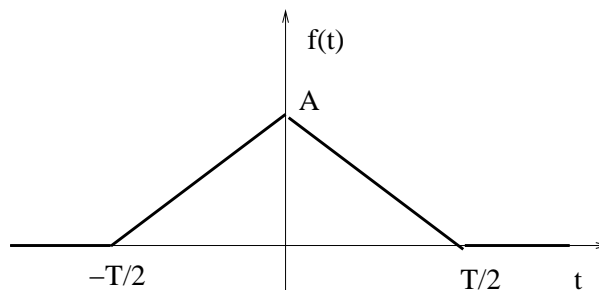


figura 2

Figura 1.2:

Esercizio 5

Sia data la funzione $f(t) = (t-3)^2 u(t-3)$; si ricavino graficamente le derivate successive fino al terzo ordine.

Esercizio 6

Sia data la funzione in figura 1.3. La si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavino le derivate prima e seconda.

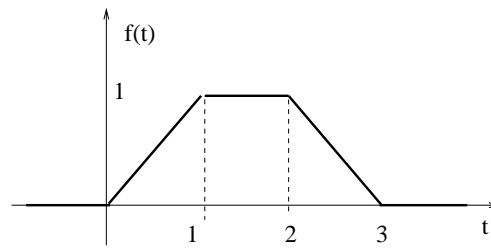


figura 3

Figura 1.3:

Esercizio 7

Sia data la funzione in figura 1.4. Se ne ricavi graficamente la derivata prima.

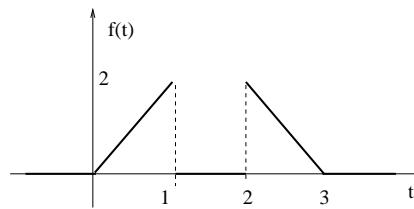


figura 4

Figura 1.4:

Esercizio 8

Sia data la funzione

$$f(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0$$

Disegnarne il grafico; ricavare algebricamente e graficamente la derivata prima distribuzionale.

Esercizio 9

Sia $g(t)$ una funzione coseno di periodo T e ampiezza 1. Si costruisca $f(t)$ limitando la $g(t)$ tramite la porta $p_{\frac{3}{8}T}(t)$ e la si disegni. Si ricavino algebricamente e graficamente le derivate distribuzionali prima e seconda.

Esercizio 10

Calcolare le derivate distribuzionali prima e seconda di

$$f(t) = (u(t) - u(t-1))(1-t^3) + (u(t+1) - u(t))(1+t^3)$$

e si confronti il risultato con il metodo grafico.

Esercizio 11

Si derivino due volte secondo le distribuzioni le seguenti funzioni:

$$a) (2t + t^3 + 2t^6)u(t) \quad b) f(t) = \sin(t)u(t)$$

Esercizio 12

Si ricavi la derivata distribuzionale al quarto ordine della funzione all'esercizio 5.

Esercizio 13

Si ricavi la derivata distribuzionale al secondo ordine della funzione all'esercizio 7.

Esercizio 14

Si ricavi per via grafica e per via analitica la derivata distribuzionale al primo e secondo ordine della funzione

$$f(t) = \sin(3t+2)(u(t) - u(t-1))$$

CAPITOLO 2

Trasformate di Laplace

2.1 Trasformate

Esercizio 1

Ricavare usando la definizione la trasformata di Laplace unilatera di:

$$a) f(t) = e^{\alpha t} \quad b) f(t) = te^{\alpha t} \quad c) f(t) = t^n e^{\alpha t}$$

Esercizio 2

Usando i risultati precedenti ricavare la trasformata di Laplace di:

$$a) f(t) = 1 \quad b) f(t) = t \quad c) f(t) = t^2 \quad d) f(t) = t^6$$

Esercizio 3

Usando la proprietà di linearità della trasformata ricavare la trasformata di:

$$a) f(t) = \cos(\omega t) \quad b) f(t) = \sin(\omega t)$$

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Laplace unilatera di $f_1(t) = \sin(t)$ supponendo nota la trasformata unilatera di $f_2(t) = \cos(t)$

Esercizio 5

Calcolare la trasformata delle seguenti funzioni utilizzando le proprietà note. Avendo riconosciuta la proprietà da utilizzare, la si dimostri prima di effettuare il calcolo.

$$\begin{aligned} a) f(t) &= t \sin(t) & b) f(t) &= t^2 \sin(t) & c) f(t) &= \cos^2(t) \\ d) f(t) &= 6 \sin(2t) - 5 \cos(2t) & e) f(t) &= (\sin t - \cos t)^2 & f) f(t) &= t^3 e^{-2t} \\ g) f(t) &= (e^t + \sin(t))^2 & h) f(t) &= e^{-t} \cos(2t) & i) f(t) &= e^{t/2} \cosh(t) \\ l) f(t) &= \cosh(5t) + \frac{1}{5} \sinh(5t) & m) f(t) &= \frac{1}{2} (t+2)^2 e^t & n) f(t) &= e^{-t/2} (\sin t)^2 \end{aligned}$$

Esercizio 6

Nota la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$, determinare la trasformata di $x(2t)$

$$\mathbb{L}[x(t)](s) = \frac{s^2 - s + 1}{(2s + 1)^2 (s - 1)}$$

Esercizio 7

Calcolare la trasformata delle seguenti funzioni utilizzando le proprietà note.

$$\begin{aligned} a) f(t) &= t^2 e^{3t} & b) f(t) &= 3e^{-2t} \cos(6t) - 5e^t \sin(3t) & c) f(t) &= e^{-2t} \sin(4t) \\ d) f(t) &= \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}, a, b \in \mathbb{R} & e) f(t) &= \cos\left(t - \frac{2}{3}\pi\right) & f) f(t) &= \int_0^t (p^2 - p + e^{-p}) dp \end{aligned}$$

Esercizio 8

Calcolare

$$a) \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sin(t) dt \quad b) \int_0^{+\infty} t e^{-4t} \sin(t) dt \quad c) \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$$

Esercizio 9

Ricavare la trasformata di:

$$\begin{array}{lll} a) & f(t) = 4e^{5t} + 6e^t - 3\sin 4t + 2\cos 2t & b) & f(t) = t^2 e^{3t} & c) & f(t) = e^{-2t} \sin 4t \\ d) & f(t) = e^{4t} \cosh 5t & e) & f(t) = e^{-2t} (3\cos 6t - 5\sin 6t) & & \\ f) & f(t) = \cos(t - 2\pi/3) & \text{per} & t > 2\pi/3, & 0 & \text{per } t < 2\pi/3 \end{array}$$

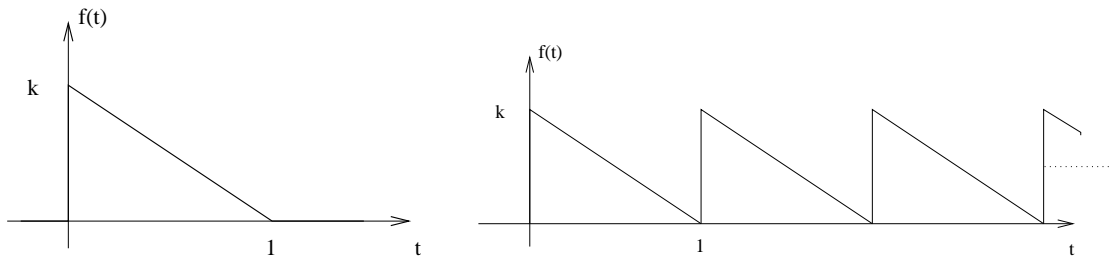
Esercizio 10Calcolare la trasformata di Laplace della funzione in figura 2.1 a sinistra $f(t)$; calcolare quindi la trasformata di Laplace della funzione in figura 2.1 a destra $g(t)$.

Figura 2.1:

Esercizio 11Calcolare la trasformata di Laplace dell'onda triangolare di picco a e di periodo $T = 2a$ **Esercizio 12**

Determinare l'espressione delle funzioni in figura 2.2 attraverso l'uso della funzione gradino e calcolarne la trasformata di Laplace (la si ricavi sia direttamente, sia, ove possibile sfruttando la proprietà di derivazione della trasformata)

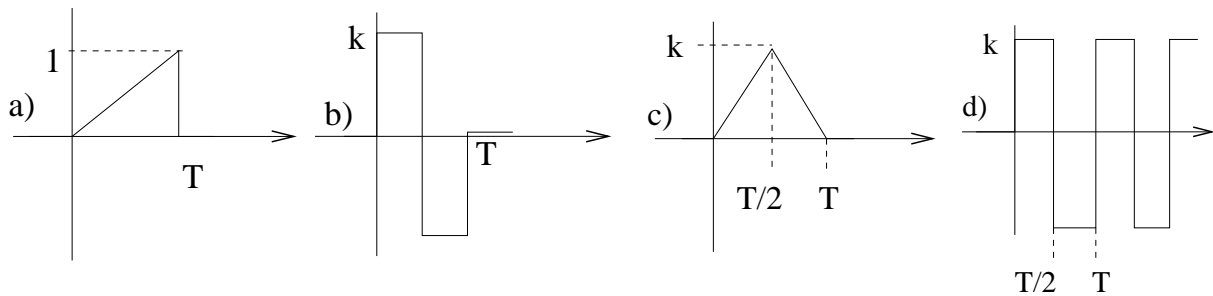


Figura 2.2:

Esercizio 13

Calcolare la trasformata di Laplace dei segnali:

$$a) f(t) = \frac{1}{2T} u(t+T) [u(t+T) - u(t-T)] + u(t-T) \quad b) f(t) = u(t)t - u(t-1)e^t + 2u(t-2)\cosh 2t.$$

Esercizio 14

Calcolare la trasformata di Laplace della funzione:

$$x(t) = \begin{cases} (1+t)^2 & 0 < t < 1 \\ 1+t^2 & t \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 15

Verificare che:

$$\int_0^{\pi} e^{-st} \sin(t) dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2}$$

Esercizio 16

Sia $x(t)$ la funzione periodica di periodo 2π definita di seguito. Determinarne la trasformata di Laplace.

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Esercizio 17

Sono date due funzioni $x(t)$ e $h(t)$ porta di durata 1 e di ampiezza rispettivamente 1 e 0.5. Se ne calcoli la convoluzione ricavandone il significato grafico.

Esercizio 18

Si ricavi la trasformata di Laplace delle funzioni (A, B, C, D) riportate in figura 2.3.

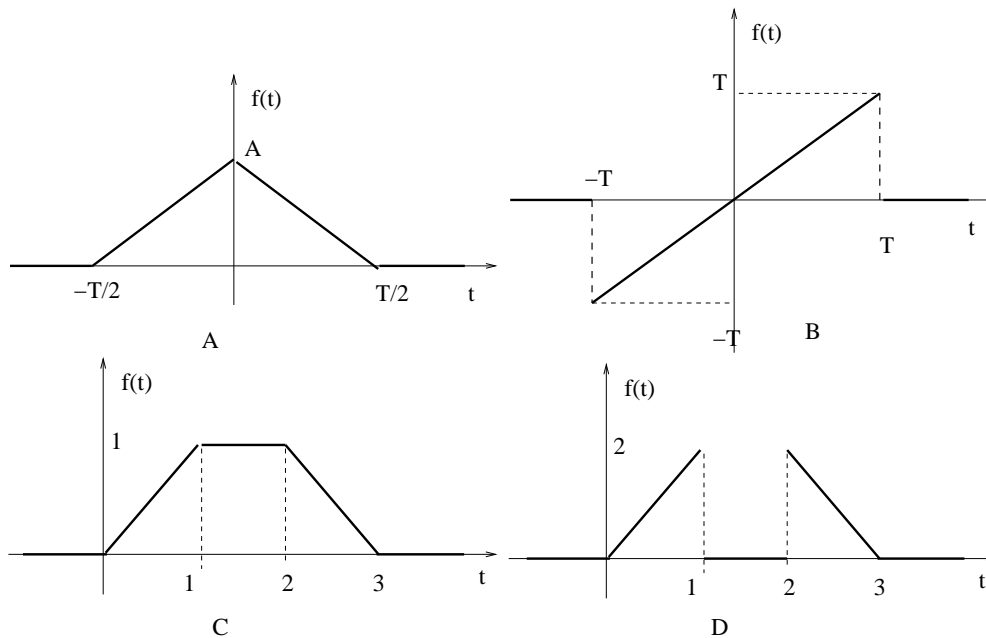


Figura 2.3:

Esercizio 19

Sono date due funzioni: $h(t)$ porta di durata T e di ampiezza rispettivamente 1, e $x(t)$ triangolo di valore 0 in 0 e di valore A in T . Se ne calcoli la convoluzione ricavandone il significato grafico.

Esercizio 20

Utilizzando i metodi visti per l'esercizio 18 si calcoli la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$ in figura 2.4 a sinistra.

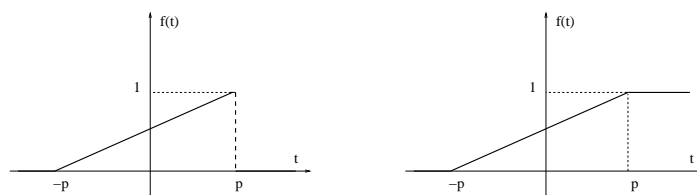


Figura 2.4:

Esercizio 21

Utilizzando i metodi visti per l'esercizio 18 e le proprietà si calcoli la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$ in figura 2.4 a destra.

CAPITOLO 3

Antitrasformate di Laplace e applicazioni

3.1 Antitrasformate

Esercizio 1

Calcolare l'antitrasformata delle seguenti funzioni razionali:

$$\begin{aligned} a) f(s) &= \frac{1}{s+9} e^{-5s} & b) f(s) &= \frac{2}{s^2+9} & c) f(s) &= \frac{3s+1}{s^2+4} \\ d) f(s) &= \frac{s+8}{s^2+2s} & f) f(s) &= \frac{1}{s(s+6)^2} & g) f(s) &= \frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici calcolare l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} a) f(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-2)} & b) f(s) &= \frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1} & c) f(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\ d) f(s) &= \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} & e) f(s) &= \log\left(1 + \frac{1}{s}\right) & f) f(s) &= \frac{1}{s(s^2+4)} \\ g) f(s) &= \frac{1}{s^2-2s+5} & h) f(s) &= \frac{4}{s-2} + \frac{3s}{s^2+16} + \frac{s}{s^2+4} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Nota la trasformata di Laplace della funzione $\sin(t)$ e utilizzando le proprietà di derivazione e di integrazione, determinare le antitrasformate delle seguenti funzioni di s

$$a) X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \quad b) Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} \quad c) K(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Esercizio 4

Determinare l'antitrasformata di Laplace delle funzione di seguito sfruttando le proprietà della convoluzione

$$a) F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2} \quad b) F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

Esercizio 5

Determinare l'antitrasformata di Laplace di:

$$\begin{array}{lll}
 a) f(s) = \frac{1}{(s^2 + 9)} & b) f(s) = \frac{1}{s^4} & c) f(s) = \frac{s}{(s^2 - 16)} \\
 d) f(s) = \frac{4}{s - 2} & e) f(s) = \frac{s}{s^2 + 2} & f) f(s) = \frac{1}{s^2 - 3} \\
 g) f(s) = \frac{1}{s^{3/2}} & h) f(s) = \frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20} & i) f(s) = \frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16} \\
 l) f(s) = \frac{6}{2s - 3} - \frac{3 + 4s}{9s^2 - 16} & + \frac{8 - 6s}{16s^2 + 9} & m) f(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} \\
 n) f(s) = \frac{e^{-5s}}{(s - 2)^4} & o) f(s) = \frac{se^{-4\pi s/5}}{s + 25} & p) f(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \\
 q) f(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) & r) f(s) = \frac{5s + 4}{s^3} - \frac{2s - 18}{s^2 + 9} & + \frac{24 - 30\sqrt{s}}{s^4}
 \end{array}$$

Esercizio 6

Determinare l'antitrasformata delle seguenti funzioni utilizzando quando possibile il teorema dei residui

$$a) f(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} \qquad b) f(s) = \frac{2s^2 - 4}{(s + 1)(s - 2)(s - 3)}$$

3.2 Applicazioni delle trasformate di Laplace**Esercizio 7**

Risolvere le seguenti equazioni differenziali utilizzando le proprietà delle trasformate di Laplace, e le eventuali condizioni iniziali specificate:

$$\begin{array}{ll}
 a) & x''(t) + x(t) = t \quad \text{con} \quad x(0) = 1, x'(0) = -2 \\
 b) & x''(t) - 3x'(t) + 2x = 4e^{2t} \quad \text{con} \quad x(0) = -3, x'(0) = 5 \\
 c) & x''(t) + 2x'(t) + 5x = e^{-t} \sin(t) \quad \text{con} \quad x(0) = 0, x'(0) = 1 \\
 d) & x'''(t) - 3x''(t) + 3x'(t) - x(t) = t^2 e^t \quad \text{con} \quad x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = -2 \\
 e) & x''(t) + 9x(t) = \cos(2t) \quad \text{con} \quad x(0) = 1, x'(\pi/2) = -1 \\
 f) & x''(t) - 2x'(t) - 8x = e^{4t} \quad \text{con} \quad x(0) = 0, x'(0) = 0 \\
 g) & x''(t) + 4x'(t) + 13x = te^{-t} \quad \text{con} \quad x(0) = 0, x'(0) = 2
 \end{array}$$

Esercizio 8

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali utilizzando le trasformate di Laplace e le eventuali condizioni al contorno specificate:

$$a) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) \\ x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y = 15\sin(2t) \\ x(0) = 35 \quad x'(0) = -48 \\ y(0) = 27 \quad y'(0) = -55 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} x' = -4x - y + e^{-t} \\ y' = x - 2y \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9

Applicazione. Dall'analisi di un circuito elettrico si ricava l'equazione nel tempo descritta di seguito. Si ricavi $i(t)$ nei casi a) e b)

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q(t) = e(t) \\ i(0) = 0 \quad q(0) = 0 \end{cases}$$

$$a) L = 1, R = 0, C = 10^{-4} \quad e(t) = \begin{cases} 100 & \text{se } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$b) L = 1, R = 100, C = 4 \cdot 10^{-4} \quad e(t) = \begin{cases} 50t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 10

Applicazione. Una massa di peso unitario è attaccata ad una molla leggera che viene tesa di 1 metro da una forza di 4 kg. La massa è inizialmente a riposo nella sua posizione di equilibrio. All'istante $t=0$ una forza esterna $f(t) = \cos(2t)$ viene applicata alla massa, ma al tempo $t = 2\pi$ la forza viene spenta istantaneamente. Si trovi la funzione posizione $x(t)$ della massa. (Il problema si traduce nell'equazione $x'' + 4x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$)

Esercizio 11

Risolvere le seguenti eq. differenziali utilizzando le trasformate di Laplace.

- a) $x''(t) + 4x(t) = 9t$ con $x(0) = 0, x'(0) = 7$
b) $x''(t) - 3x'(t) + 2x = 4t + 12e^{-t}$ con $x(0) = 6, x'(0) = -1$
c) $x''(t) - 4x'(t) + 5x = 125t^2$ con $x(0) = 0, x'(0) = 0$
d) $x''(t) + x(t) = 8\cos t$ con $x(0) = 1, x'(0) = -1$
e) $x'''(t) - x(t) = e^t$ con $x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0$

CAPITOLO 4

Probabilità classica

4.1 Spazio dei campioni ed eventi semplici

Esercizio 1

Si consideri il lancio di un dado ed i seguenti eventi: A: uscita di un numero pari; B: uscita di un numero minore di 4; C: uscita del numero 3. Si indichi con $s_1 \dots s_6$ i risultati del lancio del dado.

- a) Elencare il contenuto di S (spazio campione), di A , di B , e di C ;
b) Elencare e indicare graficamente con i diagrammi di Venn i casi: \bar{A} , $A \cup B$, $A \cap B$, $C \subset B$, $A \cap C$

Esercizio 2

Si estrae una carta a caso da un mazzo che ne contiene 52; si descriva lo spazio dei campioni quando

- a) i semi non sono presi in considerazione b) i semi sono presi in considerazione (graficamente)

Esercizio 3

Con riferimento all'esperimento dell'esercizio 4.1, sia A l'evento *è uscito un re* e B l'evento *è uscito picche*. Si descrivano gli eventi:

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$, c) $A \cup \bar{B}$, d) $\bar{A} \cup \bar{B}$ e) $A - B$ f) $\bar{A} - \bar{B}$, g) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

Esercizio 4

State monitorando tre chiamate telefoniche che stanno avvenendo in un centralino. Classificate ciascuna di esse come una chiamata vocale v , se qualcuno sta parlando, oppure una chiamata per dati d , se si tratta di un modem o di un fax. La vostra osservazione è la sequenza di di tre lettere (ciascuna sarà una v o una d). Scrivete gli elementi dei seguenti insiemi:

- a) $A_1 = \{\text{la prima chiamata è vocale}\}$ b) $B_1 = \{\text{la prima chiamata è una di dato}\}$
c) $A_2 = \{\text{la seconda chiamata è vocale}\}$ d) $B_2 = \{\text{la seconda chiamata è di dato}\}$
e) $A_3 = \{\text{tutte le chiamate sono uguali}\}$ f) $B_3 = \{\text{Voce e dati sono alternati}\}$
g) $A_4 = \{\text{una o piu' chiamate vocali}\}$ h) $B_4 = \{\text{due o più chiamate di dati}\}$

Per ciascun paio di eventi $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$ e così via, identificate se tale paio di eventi è mutuamente esclusivo oppure collettivamente esaustivo.

Esercizio 5

Un sacchetto contiene 5 gettoni verdi e due rossi. Calcolare la probabilità di estrarre un gettone verde e quella di estrarre un gettone rosso.

Esercizio 6

Al piccolo Pico de Paperis è stata regalata un'urna contenente 20 palline di cui 7 rosse, 10 nere, 3 gialle. Pico deve calcolare, estraendo una pallina dall'urna, qual è l'evento che ha maggior probabilità di verificarsi.

Esercizio 7

La piccola Elena ha strappato le etichette da 15 barattoli uguali per forma e dimensioni, ma diversi per contenuto. Infatti 4 contengono peperoni, 6 pomodori e 5 pesche sciroppate. La mamma di Elena vorrebbe sapere che probabilità ha, aprendo una scatola a caso, di trovare:

- a) peperoni b) pomodori c) pesche sciroppate d) degli ortaggi

Esercizio 8

Un appassionato giocatore del Totocalcio, ma per niente tifoso di calcio, compila tutte le settimane tre schedine e, per essere sicuro che i risultati di ciascuna partita, che egli indica su ciascuna schedina, siano diversi tra loro, ha costruito una scatoletta. Questa ha sul fondo tre scomparti in cui, dopo aver agitato, vanno tre palline e una sola per scomparto. Gli scomparti sono contrassegnati I, II, III Schedina, mentre le palline 1, 2, X. Calcolare, per una partita qualsiasi, che probabilità ha il giocatore

di segnare rispettivamente sulle tre schedine disposte in ordine crescente:

- a) 1, 2, X b) sulla terza schedina una X

Esercizio 9

In un'urna Gilberto de Pippis trova 36 palline di colore diverso: bianco, rosso e verde. Sapendo che, estraendo una pallina dall'urna, si verifica uno degli eventi indicati di seguito, e che questi hanno la probabilità di verificarsi a fianco di ciascuno segnata, Gilberto deve calcolare il numero di palline bianche, di quelle rosse e di quelle verdi presenti nell'urna.

- evento E_1 : estrazione di una pallina bianca, con $P(E_1) = \frac{1}{2}$
- evento E_2 : estrazione di una pallina rossa, con $P(E_2) = \frac{1}{3}$
- evento E_3 : estrazione di una pallina verde, con $P(E_3) = \frac{1}{6}$

Esercizio 10

Narra la leggenda che i barbari affidassero l'amministrazione della giustizia a un giudizio divino. L'accusato estraeva a sorte un animale dello zoo sacro che sarebbe stato l'esecutore della pena e perciò, a seconda dell'animale prescelto l'accusato era considerato colpevole, non colpevole o innocente. Sapendo che lo zoo era formato da 7 serpenti velenosi, 4 tori selvaggi bianchi e neri e da 2 tortore bianche, calcolare la probabilità che aveva l'imputato di essere giudicato:

- a) colpevole b) non colpevole c) innocente
d) da un animale con del bianco e) da un animale con al massimo due gambe

Esercizio 11

Ad una ditta fornitrice di vini, il signor Giacomo, titolare del bar Sport, aveva ordinato 6 bottiglie di barbera, 12 bottiglie di cortese bianco e 24 bottiglie di spumante. Oggi le bottiglie sono state consegnate, però i cartoni, ciascuno di 6 bottiglie dello stesso tipo, non hanno alcun genere di indicazione. Calcolare la probabilità che aprendo un cartone a caso il signor Giacomo trovi:

- a) le bottiglie di barbera b) le bottiglie di spumante c) delle bottiglie con vino bianco

Esercizio 12

Si lancino contemporaneamente due dadi uguali. Calcolare la probabilità che, dopo il lancio, i dadi presentino due facce i punti delle quali:

- a) abbiano per somma 5 b) abbiano al massimo per somma 5 c) abbiano almeno somma 9 d) siano gli uni tripli degli altri

Esercizio 13

Si lancino contemporaneamente due dadi uguali per dimensione ma il primo giallo e il secondo verde. Calcolare la probabilità che, dopo il lancio, i dadi si presentino in modo che, ordinati per colore giallo-verde, si possa leggere un numero:

- a) compreso tra 30 e 35 b) divisibile per 7 c) primo d) dispari e) minore o uguale a 15
f) maggiore di 70 g) tale che la prima cifra sia metà della seconda
h) tale che la prima cifra sia minore della seconda i) tale che la prima cifra sia uguale alla seconda

Esercizio 14

Il garzone del fornaio consegna alla graziosa commessa della vicina panetteria il pane e, per farsi notare, le dice che oggi le biove sono 32 in meno delle rosette e 20 in più dei filoncini. Sapendo che in tutto i pani sono 300, la commessa vuole sapere, quando prende a caso un pane, che probabilità ha di servire:

- a) una biova b) un filoncino c) una rosetta d) una biova o un filoncino

Esercizio 15

Nell'ultima corsa ippica delle Capannelle, il cavallo baio era dato a "5 contro 2" e quello morello era dato "2 contro 3". Calcolare la probabilità che hanno avuto sia il cavallo baio sia quello morello rispettivamente di vincere o di perdere.

Esercizio 16

Ad un passaggio di frontiera arriva un circo creando il solito caos: uomini, zebre, leoni, gru, elefanti, pappagalli, cavalli, colombi, ecc. I doganieri addetti al controllo sono in difficoltà nel controllare queste persone e animali in continuo movimento. Viene in aiuto al brigadiere il clown che lo invita a contare le teste e le gambe che, come risulta dai documenti, devono essere rispettivamente 112 e 310, in questo modo capirà quanti sono i bipedi e i quadrupedi.

Il brigadiere deve però anche controllare che questi animali o persone non nascondano merce di contrabbando. Essendo nell'impossibilità di svolgere un controllo minuzioso di tutto e di tutti, decide di farlo solo per quelli estratti a sorte: un tipo di bipedi e uno di quadrupedi.

Il proprietario del circo, persona astuta ma disonesta, ha nascosto dei brillanti. Sapendo che i quadrupedi sono: 7 zebre, 5 elefanti, 15 cavalli, 7 leoni, 5 tigri, e il rimanente sono cammelli, e che i bipedi sono: 40 uomini, 7 gru, 6 struzzi, 5 pappagalli, 9 colombi e il rimanente gazze, ci chiediamo dove probabilmente ha nascosto i preziosi.

Esercizio 17

Nell'aula 2 del Politecnico di Torino sede di Vercelli sono in attesa 30 studenti che alla domanda: "Chi studia l'inglese" rispondono in 15, "Chi studia il francese" rispondono in 9, "Chi studia francese e inglese" rispondono in 4. Calcolare la probabilità che, in una estrazione a sorte, sapendo che a uno studente corrisponde un numero, risulti uno studente che studia:

- a) francese b) solo francese c) almeno una lingua d) nessuna lingua e) al massimo una lingua

Esercizio 18

Il ministro di Grazia e Giustizia ha chiesto una relazione sulla situazione dei reclusi del carcere di Rebibbia. Infatti, in occasione della prossima festività nazionale, vuole concedere, per sorteggio, una licenza ad un detenuto condannato per un reato minore. La relazione è arrivata, ma la segretaria ne ha sbadatamente perso un foglio. In quelli rimasti è scritto che i carcerati sono stati condannati $1/7$ per rapina, $1/6$ per contrabbando e $1/4$ per omicidio, nessuno per due di questi reati contemporaneamente, ben 37 per tutti e tre mentre i rimanenti carcerati per reati minori. Il ministro vuole sapere ugualmente, almeno approssimativamente, la probabilità che ha un avente diritto di ottenere licenza.

Esercizio 19

In un saloon del vecchio West su uno scaffale sono esposte: 20 bottiglie di Whisky, 10 bottiglie di Rhum e 30 bottiglie di Gin. In una delle frequenti risse un cow-boy spara un colpo di pistola in direzione dello scaffale e colpisce una bottiglia. Calcolare che probabilità ha di aver colpito una bottiglia di

- a) Whisky b) Rhum c) Gin.

Esercizio 20

Raccontano gli storici che Lucrezia Borgia organizzò un un pomposo ricevimento per portare a termine la sua tremenda macchinazione. Nel culmine della festa la perfida dama si assentò per ritornare dopo alcuni minuti, preceduta da un servitore che reggeva un vassoio con 40 bicchieri pieni di vino. Alcuni anni dopo la morte della sua padrona il servitore, roso dal rimorso, rivelò che ella in quell'occasione mise in 12 bicchieri del curaro e in altri 20 del veleno a lei sola noto. Alla luce dei fatti, calcolare che probabilità ha avuto Ser Filippo, uno degli invitati, prendendo un bicchiere a caso dal vassoio di bere:

- a) veleno b) curaro c) vino genuino

Esercizio 21

In un diario di uno studente del corso di Metodi Matematici e Statistici della facoltà di ingegneria di Vercelli si legge: Oggi ero al balcone di casa mia e osservavo il passaggio che si svolgeva nella via sottostante, quand'ecco che ho visto avvicinarsi il mio tutor del corso di Metodi Matematici e Statistici. Ho avuto la tentazione di lasciargli cadere in testa uno dei 20 vasi che ornano la balastrina del balcone, ma non ne ho avuto il tempo. Ora valuto il rischio che il tutor ha corso sapendo che i vasi sono di ugual forma ma di peso diverso: 8 pesano 12kg, 3 pesano 11 kg, 4 pesano 10kg, 5 pesano 9kg. Mi chiedo che probabilità avrei avuto di gettare un vaso:

- a) più pesante, b) più leggero, c) che pesasse più di 10kg, d) che pesasse meno di 12kg.

Esercizio 22

Un sacchetto contiene 40 gettoni numerati dall'1 al 40. Calcolare la probabilità che in una estrazione a caso venga un numero:

- a) pari b) multiplo di 5 c) primo d) quadrato di un altro e) cubo di un altro f) radice di un altro

Esercizio 23

Si lancino contemporaneamente due dadi uguali; calcolare la probabilità che dopo il lancio i dadi presentino due facce i cui punti abbiano:

- a) prodotto 30 b) al massimo prodotto 30 c) almeno prodotto 30

4.2 Eventi complessi disgiunti e non disgiunti

Esercizio 24

Si estragga una pallina da un'urna contenente 12 palline gialle, 6 verdi e 18 rosse. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa oppure verde.

Esercizio 25

Calcolare la probabilità che, lanciati in aria due dadi uguali ricadano presentando due facce i cui punti abbiano:

- a) somma 7 oppure prodotto 15 b) somma 3 oppure almeno una delle due facce sia un 3 c) somma un numero divisibile per 3 oppure per 5.

Esercizio 26

Si lancino contemporaneamente due dadi ordinabili per colore. Calcolare la probabilità che essi ricadano presentando due facce sulle quali si possa leggere un numero:

- a) divisibile per 7 oppure primo b) che sia maggiore o uguale di 54 oppure abbia come prima cifra 1 c) minore-uguale di 15 oppure maggiore uguale di 60 d) che sia un quadrato oppure abbia entrambe le cifre uguali e) la cui seconda cifra sia doppia della prima oppure ne sia la metà.

Esercizio 27

Ai piccoli Qui, Quo e Qua, zio Paperino ha regalato una confezione di pezzi di legno per fare delle costruzioni. Sapendo che 20 di questi pezzi hanno forma di prismi retti e, 7 di parallelepipedi rettangoli e 15 di piramidi, calcolare la probabilità che ha uno dei paperi, prendendo un pezzo a caso, di inserire nella costruzione che ha intenzione di realizzare: a) un prisma o una piramide b) un parallelepipedo oppure una piramide.

Esercizio 28

Calcolare la probabilità che estranedo una carta da un mazzo di 40 carte essa sia: a) un asso oppure un 5 di denari b) un re oppure un fante c) una figura rossa oppure un picche d) una carta rossa oppure un picche e) una carta rossa oppure una carta nera.

Esercizio 29

Un gestore di un chiosco dei giardini pubblici ha esposto in vetrina 18 panini imbottiti, confezionati in modo uguale tra loro. Sapendo che 3 di essi contengono prosciutto, 7 salame, 5 coppa e i rimanenti mortadella, calcolare la probabilità che, servito a caso un panino, esso sia imbottito di: a) salame o coppa b) mortadella o prosciutto c) salame o prosciutto d) salame o mortadella e) prosciutto o coppa f) coppa o mortadella.

Esercizio 30

Al giornalaio di piazza Cavour a Vercelli sono appena stati consegnati i giornali. Egli li ha ammicchiati uno sull'altro e ora li sta esponendo alle pareti dell'edicola. Sapendo che gli sono state consegnate: 15 copie di Repubblica, 10 copie di La stampa, 11 copie di Tuttosport, 9 copie di La sesia, 12 copie di La gazzetta dello sport, 20 copie di La domenica, 16 copie di La settimana enigmistica, 15 copie di Quattroruote, calcolare la probabilità che, prendendo un giornale a caso esso sia: a) Repubblica oppure La gazzetta dello sport, b) La sesia oppure un settimanale c) un quotidiano oppure Quattroruote.

Esercizio 31

Si lancino contemporaneamente due dadi uguali. Calcolare la probabilità che dopo il lancio si presentino due facce i cui punti abbiano: a) somma 7 e prodotto 12 b) somma 7 oppure prodotto 12

Esercizio 32

Se da un mazzo di 40 carte ne estraiamo una, calcolare la probabilità che essa sia un re oppure una figura rossa.

Esercizio 33

Un nuovo postino deve recapitare in corso Garibaldi una lettera con l'indirizzo incompleto: manca infatti il numero civico. Sapendo che il corso ha la numerazione completa dal numero 1 al numero 20 e che il postino suona a caso un campanello tra quelli delle abitazioni della via, calcolare la probabilità che il numero civico di quella abitazione sia un numero divisibile per 2 oppure per 5.

Esercizio 34

Si estragga una carta da un mazzo di 52 carte. Si determini la probabilità che a) sia una asso, b) un fante di cuori, c) un tre di picche o un sei di fiori, d) un cuori, e) un seme diverso da cuori f) un dieci o un quadri, g) nè un quattro nè un picche.

Esercizio 35

Paperina lavora per la principale compagnia telefonica di Paperopoli, la Papercom (ovviamente di proprietà dello zione), e sta monitorando una chiamata telefonica, che classifica come V se è vocale, e come D se si tratta di dati (fax o modem); la classifica inoltre come lunga (L), se dura più di tre minuti, e come breve (B) altrimenti. In base ai dati della Papercom, Paperina conosce i seguenti modelli probabilistici: $P[V]=0.7$, $P[L]=0.6$, $P[VL]=0.35$. Paperina deve calcolare le seguenti probabilità:

a) $P[DL]$, b) $P[DU L]$, c) $P[VB]$, d) $P[VUL]$ e) $P[VU D]$, f) $P[LB]$

Esercizio 36

Il maestro di Gilberto de Pippis apre a caso un libro di 100 pagine e legge il numero della pagina a sinistra. Supponendo che il libro abbia la stessa probabilità di essere aperto in qualsiasi sua pagina, il maestro chiede a Gilberto quale sia la probabilità che ha di leggere un numero divisibile per 6 oppure per 8.

Esercizio 37

In uno scatolone sono messe alla rinfusa 40 bandierine colorate di cui 10 con strisce rosse, 15 con strisce blu e 4 con strisce blu e rosse. Calcolare la probabilità che prendendo una bandierina questa sia a strisce rosse oppure blu.

Esercizio 38

Se da un mazzo di 40 carte ne estraiamo una, calcolare la probabilità che essa sia un: a) asso rosso oppure una carta di valore minore di 5, b) re oppure una figura nera oppure un 5, c) re rosso oppure una figura nera oppure un fante di picche.

Esercizio 39

Si estraggano due palline da un'urna contenente 12 palline gialle, 6 palline verdi e 18 palline rosse. Calcolare la probabilità che esse siano a) la prima gialla e la seconda verde b) entrambe gialle, sapendo che la prima viene reinserita nell'urna prima della seconda estrazione.

Esercizio 40

Da un mazzo di 40 carte si estraggono due carte successivamente rimettendo nel mazzo la prima carta estratta. Calcolare la probabilità che le due carte siano: a) la prima un quadri e la seconda un picche, b) la prima una figura e la seconda un asso di picche

Esercizio 41

Da ciascuno di due mazzi, uguali, di 40 carte, si estragga una carta. Calcolare la probabilità che le due carte siano: a) due 7 di fiori, b) due figure.

Esercizio 42

Si lanci uno stesso dado due volte successivamente e si calcoli la probabilità di ottenere: a) un 6 con il primo lancio e un 6 con il secondo, b) un pari con il primo e un punto maggiore di 4 con il secondo, c) un punto minore di 3 con il primo e uno maggiore di 3 con il secondo.

Esercizio 43

Un libro di 100 pagine viene aperto due volte, a caso, e supponendo che la probabilità di ottenere una pagina sia sempre la stessa, calcolare la probabilità di leggere una pagina con un numero: a) 98 alla prima apertura e 88 alla seconda, b) divisibile per 11 alla prima e con la seconda cifra quadrupla della prima alla seconda apertura, c) primo in entrambe le aperture, d) divisibile per 10 alla prima apertura e divisibile per 15 alla seconda apertura.

Esercizio 44

Tip e Tap hanno, tra i loro giocattoli, un'autopista con quattro macchinine, una rossa, una gialla, una verde e una blu, che corrono su quattro guide affiancate. Sapendo che le macchine hanno la stessa probabilità di arrivare prime, Tip e Tap vogliono sapere quale è la probabilità che svolgendo due corse: a) la prima sia vinta dalla macchina rossa e la seconda da quella verde, b) entrambe le corse siano vinte dalla macchina gialla.

Esercizio 45

In un condominio ai Cappuccini i contatori della luce e gli interruttori generali dei singoli appartamenti sono raggruppati in un pannello in portineria. Gli interruttori sono disposti su 5 file, quanti sono i piani, di 7 ciascuna, tanti sono infatti gli appartamenti per piano. Il figlio della portinaia, in un momento di disattenzione della mamma, spegne a caso uno degli interruttori; la cosa si ripete per due giorni, nelle stesse condizioni, fino a quando la mamma scopre il colpevole. Calcolare la probabilità che ha avuto il bambino di spegnere l'interruttore di un appartamento: a) del primo piano il primo giorno e dell'ultimo il secondo giorno, b) del secondo piano il primo giorno e dell'appartamento numero 12 il secondo giorno.

4.3 Probabilità condizionata, teorema di Bayes

Esercizio 46

Da un'urna contenente 30 palline gialle e 20 palline rosse uguali per forma e dimensioni, si estraggono due palline successivamente, senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna. Calcolare la probabilità che: a) la prima pallina estratta sia gialla e la seconda rossa; b) entrambe siano gialle.

Esercizio 47

Da un mazzo di 40 carte si estraggono successivamente due carte senza rimettere la prima carta estratta dal mazzo. Calcolare la probabilità che: a) la prima carta estratta sia una figura e la seconda un 7, b) la prima carta estratta sia un 5 e la seconda un 7, c) entrambe le carte siano un re.

Esercizio 48

In un cassetto ci sono due barattoli uguali per forma, dimensione e colore. Essi differiscono solo per il fatto che uno di essi contiene 20 caramelle bianche e 15 caramelle rosse, mentre l'altro ne contiene 10 bianche e 5 rosse. Pippo prende a caso dal cassetto un barattolo, e da esso una caramella. Calcolare la probabilità che ha Pippo di mangiare un caramella: a) bianca del barattolo che contiene più caramelle, b) rossa del barattolo che contiene meno caramelle, c) bianca o rossa del barattolo che contiene più caramelle.

Esercizio 49

Si lanci due volte un dado non truccato. Si calcoli la probabilità di ottenere 4, 5, o 6 al primo lancio, e 1, 2, 3, o 4 al secondo lancio.

Esercizio 50

Il colonnello Bernacca è in difficoltà: essendosi guastato il satellite metereologico, non è riuscito a farsi un'idea ben precisa sulla situazione del tempo previsto per domani. Poiché entro breve si andrà in onda, deve decidere velocemente quali due targhette metereologiche mettere sulla cartina dell'Italia, e pensa dunque di sorteggiare. Sapendo che egli ha a disposizione le seguenti targhette: sole fortissimo, bel tempo, nuvoloso, nebbia, pioggia, grandine, neve e vento, calcolare la probabilità che esse siano nell'ordine: a) nuvoloso e nebbia, b) sole e neve, c) pioggia e vento.

Esercizio 51

La guardia di Finanza ha catturato due pescherecci che trasportavano sigarette di contrabbando. Volendo controllare il carico dei due pescherecci, il capitano prende, a caso, una stecca di sigarette dal primo peschereccio e poi sale a bordo del secondo per effettuare la stessa operazione. Qui giunto, a causa del forte rollio, perde l'equilibrio, e la stecca gli sfugge di mano finendo nella stiva insieme alle altre. Sapendo che il capitano preleva due stecche di sigarette, a caso, dal secondo peschereccio, e che il carico all'atto della cattura era composto, rispettivamente sui due pescherecci, da 200 e 180 stecche di Marlboro, da 300 e 280 stecche di Turmac, e da 180 e 220 di Gauloise, calcolare la probabilità che le tre stecche di sigarette che ha avuto in mano il capitano fossero: a) tutte e tre di Marlboro, b) tutte e tre di Turmac, c) tutte e tre di Gauloise.

Esercizio 52

Tip e Tap hanno due urne contenenti gettoni colorati e giocano in questo modo: Tip estrae un gettone dalla sua urna e lo mette in quello di Tap, quindi Tap ne estrarrà una dalla propria. Sapendo che l'urna di Tip contiene 30 gettoni gialli e 20 rossi, mentre quella di Tap ne contiene 15 gialli e 10 rossi, calcolare la probabilità che: a) il gettone estratto da Tip sia giallo e quello estratto da Tap sia rosso, b) entrambi i gettoni estratti dai due bambini siano rossi.

Esercizio 53

Due carte sono estratte da un mazzo ben mescolato di 52 carte. Si trovi la probabilità che esse siano entrambe assi quando a) la prima carta è rimessa nel mazzo, b) la prima carta non è rimessa nel mazzo.

Esercizio 54

Due ussari, Oblomov e Karamazov, duellano alla loro maniera, con una pistola tamburo a 6 colpi, con una sola pallottola inserita a caso, sparandosi a vicenda alternativamente. Sapendo che sparerà per primo Oblomov, e che il duello avrà termine dopo che ciascuno avrà sparato al massimo due colpi, calcolare la probabilità che ha: a) Oblomov di vincere al primo colpo, b) Karamazov di vincere al suo primo colpo, c) Oblomov di vincere al suo secondo colpo, d) e che probabilità ha il duello di finire con entrambi gli ussari illesi.

Esercizio 55

Tre palline sono estratte successivamente da un'urna contenente 6 palline rosse, 4 bianche e 5 azzurre. Si trovi la probabilità che esse siano nell'ordine rossa, bianca e azzurra, quando a) ciascuna pallina è rimessa nell'urna dopo l'estrazione, b) non è rimessa nell'urna.

Esercizio 56

Dentro un cesto di vimini Ciccio ha messo 10 pere, 15 mele e 35 pesche autunnali che ha appena raccolto nell'orto di Nonna Papera. Con due di questi frutti vuole farsi un frullato e perciò ne prende due successivamente senza guardare. Calcolare la probabilità che ha il frullato di essere: a) di sole mele, b) di mela e pera nell'ordine, c) di sole pesche.

Esercizio 57

Si trovi la probabilità che il 4 si presenti almeno una volta in due lanci di dado non truccato.

Esercizio 58

Orazio, per l'emozione di aver incontrato Clarabella, ha rovesciato tutti i chiodi che si trovavano nella sua cassetta da lavoro, e ora per servirsene deve prenderli a caso. Orazio sa che il 50% dei chiodi è lungo, che il 30% è corto, che il 40% dei chiodi lunghi è grosso e il rimanente normale, e che il 90% dei chiodi corti è sottile mentre il rimanente è normale. Sopraggiunge Archimede e Orazio gli chiede di calcolare la probabilità che il primo chiodo che egli userà sarà: a) lungo e grosso, b) lungo e normale, c) corto e sottile, d) corto e normale.

Esercizio 59

Si calcoli la probabilità di non ottenere come somma del lancio di due dadi non truccati nè 7 nè 11.

Esercizio 60

Un'urna contiene 4 palline bianche e due nere; un'altra urna contiene 3 palline bianche e 5 nere. Si estraiga una pallina da ciascun'urna e si determini la probabilità che a) entrambe le palline siano bianche, b) entrambe siano nere, c) una sia bianca e una sia nera.

Esercizio 61

Un'industria utilizza tre macchinari B1, B2 e B3 per produrre resistori da $1k\Omega$. Si è osservato che l'80% dei resistori prodotti da B1 sono entro 50Ω del valore nominale; il macchinario B2 produce il 90% dei resistori entro 50Ω del valore nominale, mentre la percentuale per il macchinario B3 è il 60%. Per ogni ora, il macchinario B1 produce 3000 resistori, il B2 produce 4000 resistori e B3 produce 3000 resistori. Tutti i resistori vengono poi mischiati insieme in uno scatolone ed impacchettati per la vendita. Quale è la probabilità che l'industria venda un resistore che sia entro il 50Ω del valore nominale?

Esercizio 62

L'urna I contiene 3 palline rosse e 2 azzurre, mentre l'urna II ne contiene 2 rosse e 8 azzurre. Una moneta non truccata è lanciata per decidere da quale urna estrarre le palline e se si verifica testa si estrae dall'urna I, in caso contrario dall'urna II. Si determini la probabilità di estrarre una pallina rossa.

Esercizio 63

I circuiti integrati vengono sottoposti a due test. Un test meccanico determina se i piedini hanno la spaziatura corretta, mentre un test elettrico controlla la correttezza delle funzioni ingresso-uscita. Assumiamo che la possibilità di fallire ciascuno dei due test sia indipendente. Fonti informate ci fanno sapere che il fallimento dei test meccanici capitano con una probabilità pari a 0.05, mentre nel caso di quelli elettrici la probabilità è pari a 0.2. Quale è il modello di probabilità di un esperimento che consiste nel testare un circuito integrato e osservare i risultati del test meccanico ed elettrico?

Esercizio 64

Nel paese di Vallestretta, famoso per i suoi allevamenti di canarini, è stata allestita una mostra mercato e, per reclamizzarla gli organizzatori hanno pensato di fare dei sorteggi tra gli acquirenti e assegnare ricchi premi. Il regolamento prevede un primo sorteggio di 10 biglietti tra tutti color che acquisteranno almeno un canarino, mentre un secondo sorteggio tra questi 10 fortunati, ai quali andrà sicuramente un premio, indicherà il vincitore del primo premio consistente in una voliera da giardino completa di accessori. Ora, a mostra conclusa, sapendo che gli acquirenti sono stati 1500, calcolare che probabilità ha avuto ciascuno di essi di risultare vincitore del primo premio.

Esercizio 65

Paperina sta monitorando due chiamate consecutive in un centralino della Papercom. Paperina classifica ogni chiamata come vocale (v), se qualcuno sta parlando, oppure di dato (d), se si tratta di un fax o di un modem. Paperina osserva la sequenza di due lettere (ovver v oppure d). Le due chiamate sono indipendenti e la probabilità che una di esse sia una chiamata vocale è pari a 0.8. Paperina denomina l'evento chiamata C_i (vocale $C_i=v$, dati $C_i=d$) e nomina il numero di chiamate vocali che conta nel monitorare due chiamate N_v (gli eventi sono dunque $N_v = 0, N_v = 1$ o $N_v = 2$). Si determini se le seguenti coppie di eventi sono indipendenti: a) $\{N_v = 2\}e\{N_v \geq 1\}$, b) $\{N_v \geq 1\}e\{C_1 = v\}$, c) $\{C_2 = v\}e\{C_1 = d\}$, d) $\{C_2 = v\}e\{N_v \text{ è pari}\}$

Esercizio 66

L'urna I contiene 3 palline rosse e 2 azzurre, mentre l'urna II ne contiene 2 rosse e 8 azzurre. Una moneta non truccata è lanciata per decidere da quale urna estrarre le palline e se si verifica testa si estrae dall'urna I, in caso contrario dall'urna II. Si supponga che chi ha lanciato la moneta non ci dica se si è verificato testa o croce (così che non si possa sapere da che urna la pallina è stata estratta), ma ci dica che dall'urna è stata estratta la pallina rossa. Qual è la probabilità che l'estrazione sia stata estratta dall'urna I (cioè che nel lancio della moneta si sia verificato testa?)

Esercizio 67

Al montaggio di 200 apparecchiature contribuiscono tre tecnici con abilità differenti. Il primo tecnico monta 50 apparecchiature, che al collaudo risultano perfette nel 90% dei casi. Il secondo ne monta 85, perfette all'80%, e il terzo ne monta 65, perfette nel 70% dei casi. Si vuole determinare la probabilità che un apparecchio di qualità buona, scelto a caso, sia montato dal terzo tecnico.

Esercizio 68

Da un'indagine di mercato risulta che un certo prodotto è venduto per il 45% dall'azienda di Paperon de Paperoni, mentre il 15% dall'azienda di Rockerduck. Paperoga vuole acquistare quel prodotto, ma non è ben certo di avere i soldi per acquistarne uno, mentre sicuramente non ne può comprare due. Il direttore del supermercato nel quale è in vendita il prodotto vuole calcolare la probabilità che Paperoga abbia acquistato il prodotto di Rockerduck.

Esercizio 69

In un sistema di comunicazione digitale, simmetrico, è trasmesso un segnale binario X nella forma 0 oppure 1, e le probabilità di trasmissione di ciascuna delle due forme è rispettivamente: $P(X=0)=0.4$, $P(X=1)=0.6$. La trasmissione è affetta da disturbi rumore, per cui esiste una probabilità non nulla $P=0.25$ che il segnale ricevuto, che indichiamo con Y, sia diverso da quello emesso X. Si vuole determinare la probabilità di ricevere 1 e quella di ricevere 0.

Esercizio 70

Un'urna contiene 3 palline azzurre e due rosse, mentre un'altra ne contiene 2 azzurre e 5 rosse. Una pallina azzurra è estratta a caso da una delle due urne. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dalla prima urna?

4.4 Calcolo combinatorio e applicazione al calcolo delle probabilità

Esercizio 71

Si deve costituire un comitato di 3 membri, uno dei quali rappresenta i lavoratori, il secondo la direzione e il terzo gli azionisti. Se ci sono tre candidati per i lavoratori, 2 per la direzione e 4 per gli azionisti, si determini quanti comitati diversi possono essere formati usando: a) le regole note del calcolo, b) un diagramma ad albero.

Esercizio 72

Una moneta viene lanciata tre volte. Con l'aiuto del diagramma ad albero si determinino tutti i casi possibili.

Esercizio 73

Tre carte sono pescate a caso (senza ripetizione ovvero senza rimettere la carta estratta nel mazzo) da un mazzo di 52 carte. Si usi un diagramma ad albero per determinare il numero di modi in cui si possono pescare a) un fiori, un picche ed un cuori in quest'ordine, b) due cuori e poi o un picche e un quadri.

Esercizio 74

In quanti modi diversi si possono sistemare tre monete in due portamonete?

Esercizio 75

In quanti modi diversi 5 palline possono essere sistemate in fila?

Esercizio 76

In quanti modi 10 persone possono sedersi su una panchina che ha solo 4 posti?

Esercizio 77

Se indichiamo con ${}_n P_r$ il numero delle permutazioni di n oggetti diversi presi r alla volta, si determinino: a) ${}_8 P_3$ b) ${}_6 P_4$ c) ${}_{15} P_1$ d) ${}_3 P_3$

Esercizio 78

Si richiede di far sedere in fila 5 uomini e 4 donne in modo tale che le donne occupino i posti pari. Quante sono le sistemazioni possibili?

Esercizio 79

Quanti numeri di 4 cifre possono essere formati con le 10 cifre 0,1,2,3...9 se a) si ammettono delle ripetizioni, b) non si ammettono ripetizioni, c) l'ultima cifra deve essere lo 0 e non si ammettono ripetizioni.

Esercizio 80

Bisogna sistemare su uno scaffale quattro diversi libri di letteratura russa, sei di letteratura francese e due di letteratura islamica. Quante sistemazioni diverse sono possibili se a) i libri di ogni tipo di letteratura devono stare insieme, b) solo i libri di letteratura russa devono stare insieme?

Esercizio 81

Cinque palline rosse, due bianche e tre azzurre devono essere sistemate in fila. Se tutte le palline dello stesso colore non sono distinguibili l'una dall'altra, quante sistemazioni sono possibili?

Esercizio 82

In quanti modi si possono sistemare intorno ad un tavolo circolare 7 membri del club dei miliardari di Paperopoli (tra i quali ovviamente Paperon de Paperoni e Rockerduck) se a) possono sedere in qualsiasi posto, b) Paperone e Rockerduck non devono sedere vicini?

Esercizio 83

Si consideri un codice binario di 4 bit (0 o 1) in ogni parola di codice. Un esempio di parola è 0110. a) Quante diverse parole di codice esistono? b) Quante parole di codice hanno esattamente 2 zeri? c) quante parole di codice cominciano con 0?

Esercizio 84

Per quale valore di n vale ${}_{n+1} P_3 = {}_n P_4$

Esercizio 85

In quanti modi diversi 5 persone possono sedersi su un divano se ci sono 3 posti disponibili?

Esercizio 86

In quanti modi 10 oggetti possono essere suddivisi in due gruppi contenenti 4 e 6 oggetti rispettivamente?

Esercizio 87

Se ${}_nC_r$ è il numero di combinazioni di n oggetti presi ad r ad r , calcolare a) ${}_7C_4$, b) ${}_6C_5$ c) ${}_4C_4$

Esercizio 88

In quanti modi diversi si può scegliere un comitato di 5 persone scelte tra 9 diverse?

Esercizio 89

Si deve formare un comitato di 2 ingegneri elettronici e 3 ingegneri informatici, scegliendoli tra 5 ing. elettronici e 7 ing. informatici. In quanti modi diversi ciò può essere fatto se a) ogni ing. elettronico così come ogni ing. informatico può essere incluso nel comitato, b) un ing. informatico particolare non può esservi incluso, c) due ing. elettronici in particolare non possono far parte del comitato?

Esercizio 90

Quante differenti insalate si possono fare con i seguenti tipi: lattuga, scarola, indivia, romana e cicoria?

Esercizio 91

Quante parole di 4 diverse consonanti e 3 diverse vocali si possono formare a partire da 7 consonanti e 5 vocali? Non è necessario che le parole abbiano un significato.

Esercizio 92

In quanti modi si possono scegliere 6 domande su 10?

Esercizio 93

Quanti comitati diversi di 3 uomini e 4 donne si possono formare da 8 uomini e 6 donne?

Esercizio 94

Un'urna contiene 8 palline rosse 3 bianche e 9 azzurre. Se estraiamo 3 palline a caso senza rimetterle nell'urna, si determini la probabilità che a) tutte e tre siano rosse, b) tutte e tre siano bianche, c) 2 siano bianche ed una azzurra, d) almeno 1 sia bianca, e) siano una di ciascun colore, f) le palline siano estratte nell'ordine: rossa, bianca, azzurra.

Esercizio 95

Nel poker si distribuiscono 5 carte da un mazzo di 52 carte ben mescolate. Si trovi la probabilità di avere a) 4 assi, b) 4 assi e un re, c) 3 dieci e due fanti, d) un nove, un dieci, un fante, una donna e un re in ordine qualunque, e) 3 carte di un seme e due di un altro, f) almeno un asso.

Esercizio 96

Determinare la probabilità di ottenere tre 6 in cinque lanci di un dado non truccato.

Esercizio 97

In uno scaffale si trovano 6 libri di matematica e 4 di fisica. Si trovi la probabilità che 3 libri particolari di matematica si trovino insieme.

Esercizio 98

Qual è la probabilità di ottenere tre successi in 5 tentativi indipendenti ciascuno con probabilità p ?

Esercizio 99

Sappiamo che un resistore testato a caso dopo la produzione ha probabilità pari a 0.78 di superare i test di precisione. Se vengono testati 100 resistori a caso, qual è la probabilità di un numero pari a i di resistori superino il test?

Esercizio 100

Calcolare la probabilità che ha, lanciando una dado 10 volte, la faccia contraddistinta dal 3 di presentarsi nel primo, nel secondo, nel sesto, nel settimo lancio.

Esercizio 101

Calcolare che probabilità, lanciando 10 volte un dado, abbia la faccia contraddistinta con il 3, di presentarsi quattro volte, non importa in quali lanci.

Esercizio 102

Per comunicare in modo affidabile un bit di informazione il telefono cellulare trasmette lo stesso simbolo binario 5 volte. Quindi, per esempio, l'informazione zero viene trasmesso come 00000, mentre l'informazione uno viene trasmessa come 11111. Il ricevitore riconosce che l'informazione è corretta se nella sequenza di 5 bit almeno tre bit sono ricevuti correttamente. Qual è la probabilità di errore $P[E]$ dell'informazione, se la probabilità di errore del singolo bit è $q = 0.1$?

Esercizio 103

Qual è la probabilità che estraendo 20 volte una pallina da un'urna contenente 8 palline bianche, 7 rosse, e 5 verdi, rimettendo dopo ogni estrazione la pallina nell'urna si abbia a) alla prima, quinta, nona, quindicesima, sedicesima estrazione una pallina verde, b) 5 volte una pallina verde, c) 5 volte una pallina rossa, d) 5 volte una pallina che sia o verde o rossa.

Esercizio 104

Qual è la probabilità che estraendo 15 volte una coppia di palline da un'urna contenente 8 palline bianche, 9 palline rosse e 4 verdi, rimettendo dopo ogni estrazione la coppia estratta dall'urna, si abbia: a) alla prima alla quarta, alla quindicesima estrazione una coppia di palline entrambe verdi, b) 4 volte una coppia di palline entrambe verdi, c) 4 volte una coppia di palline di cui una sia verde e l'altra sia rossa.

Esercizio 105

Qual è la probabilità che estraendo 15 volte una pallina da un'urna contenente 7 palline gialle, 4 blu e 9 nere, rimettendo dopo ogni estrazione la pallina estratta nell'urna si abbia: a) per 9 volte di fila una pallina gialla, b) le ultime 9 volte di fila una pallina blu alternata con una pallina nera.

Esercizio 106

Si lancia una dado 10 volte. Calcolare la probabilità di ottenere: a) punto 5 nei lanci dispari, b) punto pari maggiore di 2 nei lanci dispari, c) come punto un numero primo nei quattro lanci di mezzo della serie.

Esercizio 107

Si lancino 10 volte due dadi. Calcolare la probabilità di ottenere: a) punti con somma 4 nei primi 5 lanci, b) punti con somma 7 oppure prodotto 12 in cinque lanci, c) punti con somma 7 e prodotto 12 in tre lanci, c) punti con al massimo somma 5 nei primi tre lanci.

Esercizio 108

Dopo una votazione fatta in classe di 30 alunni per l'elezione di due ragazzi come primo e secondo rappresentante di classe, si sta procedendo allo spoglio delle schede. Queste vengono estratte a caso dall'urna e in ognuna di esse è segnata la preferenza o per l'uno o per l'altro dei due candidati e che, da sondaggi svolti, essi avevano rispettivamente, per ciascun votante, probabilità di essere votati $2/3$ e $1/3$. Calcolare la probabilità che su 10 schede estratte dall'urna: a) le prime tre presentino la preferenza per il primo candidato e le altre sette per il secondo, b) il primo candidato abbia 5 preferenze, c) il secondo candidato abbia nessuna preferenza.

Esercizio 109

Si consideri l'estrazione del primo numero del gioco del lotto sulla ruota di Torino per un seguito di 20 settimane. Calcolare la probabilità che a) ha il 5 di essere estratto le prime tre volte, b) hanni il 5 oppure il il 6 di essere estratti le prime cinque volte, c) ha un numero divisibile per 5 di essere estratto per sei volte.

4.5 Problemi vari

Esercizio 110

Supponiamo di giocare al lotto. a) Qual è la probabilità di azzeccare l'estratto semplice? b) Qual è la probabilità di azzeccare l'ambo? c) Qual è la probabilità di azzeccare il terno? d) Qual è la probabilità di azzeccare la quaterna? e) Qual è la probabilità di azzeccare la cinquina? f) Quale cifra viene restituita in ciascuno dei casi precedenti?

Esercizio 111

Nell'atrio della facoltà di lettere dell'università degli studi di Torino sede di Vercelli ci sono tre macchine distributrici, una di caffè una di tramezzini e una di bibite. La ditta costruttrice ha assicurato che le tre macchine hanno rispettivamente probabilità di non guastarsi durante un mese: $P(\text{caffè}) = 23/30$, $P(\text{tramezzini}) = 25/30$, $P(\text{bibite}) = 27/30$. Il preside della facoltà vuol sapere che probabilità c'è di dover chiedere l'intervento del riparatore, durante un mese, per la rottura: a) di almeno una macchina qualsiasi, b) solo della prima, c) di una sola delle prime due (come se le macchine fossero solo quella del caffè e quella dei tramezzini), d) di una sola tra tutte e tre le macchine.

Esercizio 112

Al rivenditore di elettrodomestici hanno consegnato 10 scatoloni uguali tra loro che contengono sette televisori a tubo catodico e tre televisori a tecnologia digitale. Inoltre sono state consegnate nove scatole più piccole delle precedenti, anch'esse uguali tra loro che contengono tra loro però 5 lettori MP3 e quattro lettori CD. Il rivenditore, un tipo un po' scontroso, non ha ancora rotto gli imballaggi quando un cliente gli ordina una televisione digitale e un lettore CD. Noi, conoscendo il rivenditore, sappiamo che se, dopo aver aperto al massimo due scatoloni e successivamente tre scatole piccole, non avrà trovato ciò che cerca, si spazientirà e dirà al cliente, in malo modo, di ripassare un altro giorno. Ci chiediamo perciò che probabilità ha il cliente di essere servito in ciò che desidera: a) alla prima apertura degli imballaggi, b) alla seconda apertura degli imballaggi, c) solo della televisione a colori, d) solo del lettore CD.

Esercizio 113

Il salotto di Paperino ha tre poltrone un po' vecchie e Qui, Quo e Qua hanno calcolato che, durante l'anno ciascuna di esse abbia questa probabilità di rompersi: la prima $P(A)=2/11$, la seconda $P(B)=3/16$, la terza $P(C)=4/15$. Vogliamo sapere quale probabilità di verificarsi abbiano i seguenti eventi: a) nessuna poltrona si rompa durante l'anno, b) si rompa solo la prima poltrona.

Esercizio 114

In una tribù di cannibali, ad un prigioniero condannato a morte, lo stregone vuole offrire una possibilità di salvezza. Gli presenta sul tavolo due vasi di coccio identici, contenenti uno 25 palline nere e l'altro 25 palline bianche, assicurandogli che, se estrarrà una pallina bianca, sarà messo in libertà. Il prigioniero pensa alla probabilità di scegliere il vaso contenente palline bianche e trova che non gli sarà facile sopravvivere. Egli crede allora di aumentare la propria probabilità di salvezza sfruttando l'ignoranza dello stregone. Chiede ed ottiene che le palline bianche siano tutte, eccetto una, spostate nell'altro vaso insieme a quelle nere. Secondo voi il prigioniero ha effettivamente aumentato le proprie possibilità di salvezza?

Esercizio 115

Un treno parte da Paperopoli per recarsi a Ducktown, passando per la stazione di Ocopoli. A un certo punto del viaggio il macchinista all'aiutante che gli chiede quanti chilometri abbiano percorso dalla partenza, volendo dar sfogo al suo amore per la matematica, risponde: "Abbiamo percorso la metà dei chilometri che dobbiamo percorrere per arrivare ad Ocopoli". Superata Ocopoli già da tempo l'aiutante chiede quanti chilometri manchino per arrivare a destinazione e il macchinista risponde: "La metà di quelli che abbiamo percorso da Ocopoli". Sapendo che il treno tra la prima e la seconda domanda dell'aiutante ha percorso 200 km e che, ogni 100 km ha probabilità $3/5$ di incontrare un segnale verde e $2/5$ di incontrarlo rosso, si calcoli che probabilità abbia il treno di arrivare a Ducktown trovando: a) tutti segnali verdi, b) il primo segnale verde, il secondo rosso e così via alternativamente, c) un solo segnale rosso, d) un solo segnale verde.

Esercizio 116

La signora Rosa fa la sarta e ha sempre pienamente soddisfatto le richieste delle sue clienti. In questi ultimi tempi però il lavoro è aumentato eccessivamente e la signora ha deciso di procurarsi l'aiuto continuo di due aiutanti. La signora sa che qualche dipendente potrebbe non presentarsi al lavoro con probabilità $1/25$: perciò decidere di assumere tre aiutanti anziché due e ci chiede quale probabilità abbia di assicurarsi la presenza costante di almeno due aiutanti.

Esercizio 117

In un club parigino del secolo decimonono, tre soci, dopo un ennesimo diverbio, decidono di lavare l'onta di cui ciascuno si sente coperto dagli altri due con un duello a tre, al primo sangue. Essi si disporranno ad uguale distanza tra loro; sparerà per primo il peggior tiratore, un solo colpo contro il tiratore mediocre, che, se sarà ancora illeso, sparerà contro il miglior tiratore e, nello stesso modo, questi sparerà contro il primo tiratore. Il duello avrà termine quando ciascun tiratore, se non sarà stato colpito prima, avrà sparato i due colpi a disposizione. Francois, uno dei più esperti allibratori di Parigi, sa che Martin è il peggior tiratore con probabilità di fare centro $P=6/10$, Jean è il tiratore di media abilità con probabilità di fare centro $7/10$ e Stephan è il miglior tiratore con probabilità di fare centro $P=9/10$. Francois scommette e si chiede a) come si disporranno i duellanti, b) che probabilità Martin di vincere, c) di perdere, d) di non essere colpito senza vincere.

Esercizio 118

Determinare la probabilità p o una sua stima per ciascuno dei seguenti eventi:

- Un re, un asso, un fante di picche o una donna di fiori si pescano estraendo una singola carta da un mazzo ben mescolato.
- La somma 8 si presenta nel lancio di due dadi non truccati.
- Avendo esaminato 600 bulloni dei quali 12 erano difettosi, osservare all'esame successivo un bullone difettoso.
- un 7 o un 11 come somma nel lancio di una coppia di dadi non truccati.
- almeno una testa in tre lanci di una moneta non truccata.

Esercizio 119

Un'urna contiene 2 palline rosse e 3 azzurre. Trovare la probabilità che se si estraggono due palline a caso (senza rimettere la prima nell'urna) a) entrambe siano azzurre, b) entrambe siano rosse, c) una sia rossa e l'altra sia azzurra.

Esercizio 120

Un'urna contiene 3 palline azzurre e 2 rosse, mentre un'altra ne contiene 2 azzurre e 5 rosse. Una pallina azzurra è estratta a caso da una delle due urne. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dalla prima urna?

Esercizio 121

Determinare a) ${}_4P_2$, b) ${}_7P_5$, a) ${}_{10}P_3$

Esercizio 122

Determinare a) ${}_5C_3$, b) ${}_8C_4$, c) ${}_{10}C_8$

Esercizio 123

Trovare la probabilità di ottenere 7 punti a) una volta, b) almeno una volta, c) due volte, in due lanci di una coppia di dadi non truccati.

Esercizio 124

Una moneta è lanciata tre volte: con l'aiuto del diagramma ad albero si determinino tutti i diagrammi possibili.

Esercizio 125

Una pallina è estratta a caso da un'urna che ne contiene 10 rosse, 20 azzurre, 30 bianche e 15 gialle. Trovare la probabilità che la pallina estratta sia a) gialla o rossa, b) nè rossa nè azzurra, c) non azzurra, d) bianca, e) rossa, bianca o azzurra.

Esercizio 126

Trovare la probabilità di pescare 3 assi da un mazzo di 52 carte quando a) la carta pescata è rimessa nel mazzo, b) non è rimessa nel mazzo.

Esercizio 127

L'urna I contiene 2 palline bianche e 3 nere; l'urna II ne contiene 4 bianche e 1 nera; l'urna III, 3 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna e se ne estrae una pallina bianca. Determinare la probabilità che si sia scelta l'urna I.

Esercizio 128

In quanti modi diversi si possono sistemare tre monete in due portamonete?

Esercizio 129

Quanti numeri diversi si possono formare con 3 quattro, 4 due e 2 tre?

Esercizio 130

Quanti comitati diversi di 3 uomini e 4 donne si possono formare da 8 uomini e 6 donne?

Esercizio 131

Si estraggono successivamente due carte da un mazzo di 52 carte. Si determini la probabilità che a) la prima carta non sia un 10 di picche o un asso, b) la prima carta sia un asso ma non la seconda, c) almeno una carta sia un fiori, d) le carte non siano dello stesso seme, e) non più di una carta sia una figura, f) la seconda carta non sia una figura, g) la seconda carta sia una figura posto che la prima lo sia, h) le carte siano figure o quadri o entrambi.

Esercizio 132

Quante parole si possono formare con 5 lettere se a) tutte le lettere sono diverse, b) 2 lettere sono uguali, c) tutte le lettere sono uguali ma due particolari lettere non possono stare vicine?

Esercizio 133

Se almeno un bambino di una famiglia con due bambini è di sesso maschile, qual è la probabilità che entrambi siano di sesso maschile?

Esercizio 134

Tre carte sono pescate a caso (senza ripetizione ossia senza rimettere la carta estratta nel mazzo) da un mazzo di 52 carte. Si usi un diagramma ad albero per determinare il numero di modi in cui si possono pescare a) un fiori, un picche e un cuori in quest'ordine, b) due cuori e poi o un picche o un quadri.

Esercizio 135

Trovare a) il numero delle combinazioni e b) il numero delle permutazioni di quattro lettere della parola *Tennessee*.

Esercizio 136

In una partita a scacchi tra Archimede e Gilberto de Pippis, Archimede è dato vincente 3 a 2. Se si giocano tre partite, a quanto sarà dato il fatto che a) Archimede vinca almeno due partite su 3, b) che Archimede vinca le prime due partite contro Gilberto?

Esercizio 137

La probabilità che un tiratore centri il bersaglio è $2/3$. Se continua a tirare finché centra il bersaglio, determinare la probabilità che egli debba tirare 5 volte.

Esercizio 138

Il Prof. Zapotec e Eta Beta giocano 12 partite a scacchi delle quali 6 sono vinte da il Prof. Zapotec, 4 da Eta Beta e 2 pareggiate. I due giocatori si accordano di giocare una rivincita che consiste in 3 partite. Si trovi la probabilità che a) il Prof. Zapotec vinca le tre partite, b) due partite finiscano in pareggio, c) il Prof. Zapotec e Eta Beta vincano alternativamente, d) Eta Beta vinca almeno una partita.

Esercizio 139

Gastone e Paperino lanciano alternativamente una coppia di dadi. Vince il primo che ottiene una somma pari a 7. Si trovi la probabilità che a) il primo che lancia vinca la partita, b) il secondo che lancia vinca la partita.

Esercizio 140

Una macchina produce 12000 bulloni al giorno dei quali mediamente il 3% è difettoso. Si determini la probabilità che di 600 bulloni scelti a caso 12 siano difettosi.

Esercizio 141

Un'urna contiene 5 palline rosse e 4 bianche. Si estraggono 2 palline successivamente dall'urna senza rimettere la prima nell'urna e si nota che la seconda pallina estratta è bianca. Quale è la probabilità che anche la prima sia bianca?

Esercizio 142

La probabilità che un marito ed una moglie siano viventi tra 20 anni sono rispettivamente 0.8 e 0.9. Trovare la probabilità che tra 20 anni a) entrambi siano vivi, b) nè uno nè l'altro lo siano, c) almeno uno sia ancora vivo.

Esercizio 143

Paperoga mette in modo del tutto casuale n diverse lettere in n buste sulle quali vi sono già gli indirizzi. Determinare la probabilità che almeno una delle lettere arrivi alla giusta destinazione.

Esercizio 144

Si trovi la probabilità che n persone ($n \leq 365$) scelte a caso abbiano n diverse date di nascite.

Esercizio 145

(Tema d'esame 28/03/01) Si enunci e di dimostri il teorema delle probabilità totali. Si risolva poi il seguente problema. In un'urna vi sono 6 monete: 3 sono normali (tipo a) con testa e croce sulle due facce e perfettamente equilibrate, 2 hanno invece testa sulle due facce (tipo b) e una ha croce sulle due facce (tipo c). Si estraggono simultaneamente due monete dall'urna e si lanciano entrambe.

- Calcolare la probabilità che le due monete siano estratte siano di tipo: aa , bb , cc , ab , ac , bc .
- Calcolare la probabilità di ottenere una testa e una croce.
- Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo aa sapendo che si è ottenuto una testa e una croce.
- Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo bc sapendo che si è ottenuto una testa e una croce.

Esercizio 146

(Tema d'esame 15/07/01) Si introduca una distribuzione binomiale e se ne discutano le principali proprietà. Si dica poi quali leggi di probabilità possono essere usate, in determinate circostanze, per approssimare la distribuzione binomiale. Si risolva quindi il seguente problema. Un contadino possiede galline ovaiole di due razze diverse, diciamo di tipo A e di tipo B. La probabilità che una gallina di tipo A faccia un uovo in un fissato giorno è pari a 0.5, mentre tale probabilità vale 0.3 per una gallina di tipo B. Supponiamo che il contadino possieda 100 galline di tipo A e 200 galline di tipo B.

- Calcolare la probabilità che una gallina scelta a caso faccia un uovo in un fissato giorno.
- Calcolare la probabilità che una gallina che fa un uovo in un fissato giorno sia di tipo B.
- Determinare in modo approssimato al legge del numero totale di uova prodotte dalla totalità delle galline in un fissato giorno.

Esercizio 147

(Tema d'esame 19/09/01) In un'urna vi sono 6 monete: 3 sono normali (tipo a) con testa e croce sulle due facce e perfettamente equilibrate, 2 hanno invece testa sulle due facce (tipo b) e una ha croce sulle due facce (tipo c). Si estraggono simultaneamente due monete dall'urna e si lanciano entrambe.

- Calcolare la probabilità che le due monete siano estratte siano di tipo: aa , bb , cc , ab , ac , bc .
- Calcolare la probabilità di ottenere due teste.
- Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo aa sapendo che si è ottenuto due teste.
- Calcolare la probabilità di aver estratto due monete di tipo bb sapendo che si è ottenuto due teste.

Esercizio 148

(Tema d'esame 31/01/00) In una città inglese piove la metà del tempo e $2/3$ delle volte le previsioni metereologiche sono corrette. Jeeves, il maggiordomo, porta con sé l'ombrello quando la previsione è "pioverà" ed $1/3$ delle volte lo porta anche quando la previsione è "non pioverà". Con quale probabilità Jeeves sarà colto dalla pioggia senza avere con sé l'ombrello, e con quale probabilità avrà portato l'ombrello inutilmente?

Esercizio 149

(Tema d'esame 31/01/00) È più probabile ottenere almeno una volta 6 gettando 6 volte un dado, oppure almeno due volte 6 gettandolo 12 volte, oppure ancora almeno tre volte 6 gettandolo 18 volte?

Esercizio 150

(Tema d'esame 25/07/01) Si consideri un'urna contenente 7 palline nere, 2 rosse e una bianca. Si compiono, da detta urna, 5 estrazioni consecutive, rimettendo ciascuna volta, la pallina estratta nell'urna.

- Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, esattamente 3 volte una pallina rossa.
- Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, almeno 3 volte una pallina rossa.
- Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, esattamente 3 volte una pallina rossa, una volta una nera e una volta una bianca.

Si supponga ora di cambiare esperimento e di estrarre, sempre dalla stessa urna, due palline consecutivamente senza riimmissione: d) Calcolare la probabilità che siano entrambe rosse; e) Calcolare la probabilità che siano una rossa e una bianca;

Esercizio 151

(Tema d'esame 19/09/00) Si enunci e si dimostri il teorema di Bayes. Si risolva poi il seguente problema. Vi sono tre dadi a sei facce, due normali con i numeri da 1 a 6 sulle sei facce ed uno truccato con il numero 1 su due facce, il numero 3 su tre facce e il numero 5 sulla rimanente faccia. Si sceglie a caso un dado, senza poter vedere se è quello truccato, e lo si lancia due volte. Calcolare:

- La probabilità che nei due lanci si ottenga due volte il numero 3.
- La probabilità che la somma dei risultati ottenuti nei due lanci sia uguale a 6.
- La probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che nei due lanci si è ottenuto due volte il numero 3.
- La probabilità di aver scelto il dado truccato sapendo che la somma nei due lanci è stata uguale a 6.

Esercizio 152

(Tema d'esame 03/04/01) Un dispositivo per la ricerca automatica delle linee telefoniche effettua la ricerca tra tre linee A, B, C, ogni volta in maniera casuale e indipendente dalle volte precedenti. La linea A è perfettamente funzionante, mentre le linee B e C sono difettose con probabilità p_1 e p_2 , rispettivamente, di non funzionare.

- a) Se si effettua una prova, qual è la probabilità di ottenere la comunicazione?
- b) Se si effettuano tre prove, qual è la probabilità di ottenere la comunicazione tutte e tre le volte?
- c) Sempre effettuando tre prove, qual è la probabilità di ottenere la comunicazione almeno una volta?
- d) Se nelle tre prove si ottiene sempre la comunicazione, qual è la probabilità che il dispositivo abbia scelto sempre la linea A?
- e) Se $p_1 + p_2 = 1.9$, qual è il numero minimo di prove che garantisce una probabilità almeno del 90% di ottenere comunicazione almeno una volta?

Esercizio 153

(Tema d'esame 04/07/00) Un certo test eseguito con la macchina della verità è in grado di smascherare un mentitore con probabilità 0.9. Tuttavia può anche risultare falsamente positivo, erroneamente giudicando mentitore una persona che invece dice la verità, con probabilità 0.01. Viene scelta una persona a caso in un gruppo di 200 dove ve ne è esattamente una che mente sottoposta al test.

- a) Calcolare la probabilità che tale persona sia giudicata un mentitore dal test.
- b) Calcolare la probabilità che la persona sia effettivamente un mentitore sapendo che il test è risultato positivo.
- c) Supponendo che il test venga ripetuto, sulla stessa persona e in condizioni di totale indipendenza per due volte, calcolare la probabilità che la persona sia effettivamente un mentitore sapendo che il test è risultato positivo entrambe le volte.

Esercizio 154

(Tema d'esame 25/07/00) Si consideri un'urna contenente 6 palline nere, 3 rosse e una bianca. Si compiono, da detta urna, 5 estrazioni consecutive, rimettendo ciascuna volta, la pallina estratta nell'urna.

- a) Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, esattamente 3 volte una pallina rossa.
- b) Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, almeno 3 volte una pallina rossa.
- c) Calcolare la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, esattamente 3 volte una pallina rossa, una volta una nera e una volta una bianca.

Si supponga ora di cambiare esperimento e di estrarre, sempre dalla stessa urna, due palline consecutivamente senza riimmissione.

- d) Calcolare la probabilità che siano entrambe rosse;
- e) Calcolare la probabilità che siano una rossa e una bianca;

CAPITOLO 5

Variabili aleatorie

5.1 Variabili aleatorie discrete

Esercizio 1

Si supponga di lanciare una moneta due volte in modo che lo spazio dei campioni si $\{TT, TC, CT, CC\}$. X rappresenta il numero delle volte in cui si verifica testa. Trovare la densità (ovvero la funzione di probabilità) di X .

Esercizio 2

Trovare la distribuzione di probabilità dei ragazzi e delle ragazze nelle famiglie con tre figli supponendo che la probabilità di una nascita di sesso maschile sia pari a quella di una nascita di sesso femminile.

Esercizio 3

Una moneta è lanciata tre volte; se X è la variabile casuale che ci fornisce il numero di teste che si verificano nei lanci si costruisca la tabella di distribuzione di probabilità di X .

Esercizio 4

In un'urna ci sono 5 palline bianche e 3 nere; se ne estraggono a caso senza ripetizione due palline e X ci fornisce il numero di palline bianche estratte, determinare la distribuzione di probabilità di X .

Esercizio 5

Si risolva il problema precedente se le palline sono rimesse nell'urna dopo l'estrazione.

Esercizio 6

Paperina (che lavora alla Papercom) osserva ad uno switch telefonico tre chiamate; ciascuna può essere di voce (v) o di dato (d), tra loro ugualmente probabili. Sia X il numero di chiamate vocali e Y il numero di chiamate di dato, e sia $R=XY$. Si ricavi la tabella delle corrispondenti variabili casuali X , Y e R .

Esercizio 7

Sia Z la variabile casuale che fornisce la differenza fra il numero di teste e quello di croci in due lanci di una moneta non truccata. Determinare la distribuzione di probabilità di Z e confrontare il risultato con quello dell'esercizio 1.

Esercizio 8

Sia X una variabile casuale che fornisce il numero di assi risultanti da una pescata di 4 carte da una mazzo di 52. Costruire una tabella con la distribuzione di probabilità di X .

Esercizio 9

Si supponga di giocare un dado non truccato. Un giocatore vince 10 euro se si presenta il 2, 20 euro se si presenta il 4 e ne perde invece 15 se si presenta il 6. Se si presenta uno dei qualsiasi restanti numeri non vince nulla né perde nulla. Determinare la vincita attesa del giocatore.

Esercizio 10

In una lotteria ci sono 200 premi da 5 euro, 20 da 25 euro e 5 da 100. Se supponiamo che si vendano 100000 biglietti, qual è il prezzo equo da pagare per un biglietto?

Esercizio 11

Si determini il valore medio della somma dei punti ottenuti nel lancio di una coppia di dadi non truccati.

Esercizio 12

Una variabile casuale X è definita da $X=-2$ con probabilità $1/3$; $X=3$ con probabilità $1/2$, $X=1$ con probabilità $1/6$. Determinare a) $E(X)$, b) $E(2X + 5)$, c) $E(X^2)$

Esercizio 13

Determinare la probabilità che lanciando una moneta tre volte si verifichi a) tre volte testa; b) 2 volte croce e una testa; c) almeno una volta testa; d) non più di una volta croce. Si ricavino i risultati sia utilizzando i metodi classici, sia utilizzando la distribuzione binomiale.

Esercizio 14

Determinare la probabilità che in cinque lanci di un dado un tre si verifichi a) due volte, b) non più una volta, c) almeno due volte.

Esercizio 15

Determinare la probabilità che in una famiglia di 4 figli ci sia a) almeno un ragazzo, b) almeno un ragazzo e una ragazza. Si supponga che la probabilità di una nascita maschile sia $1/2$.

Esercizio 16

Su 2000 famiglie di paperi con 4 paperotti ciascuna, quante è probabile abbiano a) almeno un paperotto, b) 2 paperotti, c) 1 o due paperotte, d) nessuna paperotta?

Esercizio 17

Determinare la probabilità di ottenere 7 punti almeno una volta in tre lanci di una coppia di dadi.

Esercizio 18

Determinare a) la varianza e b) la deviazione standard della somma ottenuta lanciando una coppia di dadi non truccati (esercizio 11)

Esercizio 19

Determinare la varianza e la deviazione standard del numero di punti che si verificano nel lancio di un dado non truccato.

Esercizio 20

Determinare varianza e deviazione standard della variabile casuale X del problema numero 12.

Esercizio 21

Per una variabile casuale X vale $E(X) = 2$ e $E(X^2) = 8$. Determinare a) $Var(X)$, b) σ_X

Esercizio 22

Il 10% degli oggetti prodotti con un certo processo di fabbricazione sono difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 10 oggetti scelti a caso esattamente due siano difettosi usando a) la distribuzione binomiale, b) l'approssimazione della binomiale alla poissoniana.

Esercizio 23

Se la probabilità che un individuo sia allergico ad un certo siero è 0.001. determinare le probabilità che su 2000 individui a) esattamente 3, b) più di due siano allergici.

Esercizio 24

Un'urna contiene 4 palline rosse e 6 blu. Si scelga una pallina, la si osservi, ma non la si rimetta nell'urna. Determinare la probabilità di ottenere in questo modo 3 palline blu in 5 estrazioni.

Esercizio 25

Determinare la probabilità che lanciando una moneta non truccata 6 volte, si verifichino a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) 4, f) 5, e) 6 teste.

Esercizio 26

Se il 3% delle lampadine costruite da una fabbrica sono difettose, determinare la probabilità che in una campione di 100 lampadine a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) 4, f) 5 lampadine siano difettose.

Esercizio 27

Determinare la probabilità che si verifichino a) 2 o più teste, b) meno di 4 teste, in un lancio di 6 monete non truccate.

Esercizio 28

Relativamente al problema 5.1 determinare la probabilità che a) più di 5, b) tra 1 e 3, c) 2 o meno lampadine siano difettose.

Esercizio 29

Un'urna contiene 5 palline rosse e 10 bianche. Se si estrarono a caso senza ripetizione 8 palline determinare la probabilità che a) 4 siano rosse, b) tutte siano bianche, c) almeno una sia rossa.

Esercizio 30

Se X denota il numero di teste di una lancio di 4 monete non truccate, determinare a) $P(X = 3)$, b) $P(X < 2)$, c) $P(X \leq 2)$, d) $P(1 < X \leq 3)$

Esercizio 31

Un'urna contiene una pallina rossa e sette bianche. Una pallina è estratta dall'urna e se ne osserva il colore, dopo la si rimette nell'urna e le palline contenute nell'urna vengono rimescolate. Usando a) la distribuzione binomiale, b) l'approssimazione della binomiale alla poissoniana, determinare la probabilità che in 8 estrazioni si scelga una pallina rossa 3 volte.

Esercizio 32

Se 13 carte sono scelte a caso senza ripetizione da un mazzo con 52 carte, determinare la probabilità che a) 6 siano figure b) nessuna sia una figura.

Esercizio 33

Determinare la probabilità di un 11 a) una volta, b) due volte in due lanci di una coppia di dadi non truccati.

Esercizio 34

In accordo ad una statistica, il numero di annegamenti in un anno è pari allo 0.3 su 100000 abitanti. Determinare la probabilità che in una città con 200000 abitanti ci siano a) 0, b) 2, c) 6, d) 8, e) tra 4 e 8, f) meno di 3 annegamenti in un anno.

Esercizio 35

Determinare la probabilità di rispondere correttamente almeno 6 volte su 10 domande di un esame sì-no.

Esercizio 36

Di 60 iscritti a una università 40 vengono da fuori città. Se si scelgono a caso 20 iscritti, qual è la probabilità che a) 10, b) non più di due vengano da fuori città?

Esercizio 37

La funzione di probabilità doppia di due variabili casuali discrete X e Y è data da $f(x, y) = c(2x + y)$, in cui x e y possono assumere tutti i valori interi tali che $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$, e $f(x, y) = 0$ altrove. a) determinare il valore della costante c ; b) trovare $P(X = 2, Y = 1)$, c) Trovare $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.

Esercizio 38

Per le variabili casuali X e Y definite come dell'esercizio precedente, determinare a) $E(X)$, b) $E(Y)$, c) $E(XY)$, d) $E(X^2)$, e) $E(Y^2)$, f) $Var(X)$, g) $Var(Y)$, h) $Cov(X, Y)$, i) ρ .

CAPITOLO 6

Funzione di ripartizione e densità di probabilità

6.1 Distribuzione cumulata continua

Esercizio 1

La distribuzione cumulata o funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ (x+1)/2 & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- Qual è la probabilità $P[X > 1/2]$?
- Qual è la probabilità $P[-1/2 < X \leq 3/4]$?
- Qual è la probabilità $P[|X| \leq 1/2]$?
- Qual è il valore di a tale che $P[X \leq a] = 0.8$?

Esercizio 2

La funzione di distribuzione di una variabile casuale X è: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Determinare

- la funzione di densità
- la probabilità che $P[-3 < X \leq 4]$

Esercizio 3

a) Trovare la costante per cui $f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è una funzione di densità e b) determinare $P(1 < X < 2)$.

Esercizio 4

La funzione di densità di una variabile casuale X è $f_X(x) = \begin{cases} ce^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Determinare

- la costante c
- $P(1 < X < 2)$
- $P(x \geq 3)$
- $P(X < 1)$

Esercizio 5

Determinare la funzione di distribuzione della variabile casuale del problema precedente. Rappresentare graficamente la funzione di densità e di distribuzione e descrivere la relazione che intercorre tra loro.

Esercizio 6

Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} & 0 < x < 5 \\ -\frac{x}{25} + \frac{2}{5} & 5 < x < 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Determinare la funzione di ripartizione di X
- Usando la funzione di ripartizione individuata calcolare $P(2 \leq X \leq 9)$

Esercizio 7

La funzione di densità di una variabile casuale X è

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ cx & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare

- la costante c
- $P(X > 2)$
- $P(1/2 < X < 3/2)$

Esercizio 8

Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

- Determinare la funzione di ripartizione di X ,
- Usando la funzione di ripartizione individuata calcolare $P(-0.5 < X \leq 0.5)$

Esercizio 9

La funzione di densità di una variabile casuale X è $f(x) = c/(x^2 + 1)$, in cui $-\infty < x < +\infty$.

- Determinare la costante c
- trovare la probabilità che X^2 sia compresa tra $1/3$ e 1

Esercizio 10

La variabile casuale X ha PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quali condizioni sulle costanti a e b sono necessarie affinché $f_X(x)$ sia una PDF valida?

6.2 Distribuzione cumulata discontinua**Esercizio 11**

Sia X una variabile casuale con funzione di distribuzione cumulata pari a:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- Si tracci il grafico della CDF
- Si ricavi $P[X < -1]$ e $P[X \leq -1]$
- Si ricavi $P[X < 0]$ e $P[X \leq 0]$
- Si ricavi $P[0 < X \leq 1]$ e $P[0 \leq X \leq 1]$
- Si ricavi $f_X(x)$

Esercizio 12

Sia X una variabile casuale con funzione di distribuzione cumulata pari a:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Si tracci il grafico della CDF
- b) Si ricavi $P[X < -1]$ e $P[X \leq -1]$
- c) Si ricavi $P[X < 0]$ e $P[X \leq 0]$
- d) Si ricavi $P[X > 1]$ e $P[X \geq 1]$
- e) Si ricavi $f_X(x)$

CAPITOLO 7

Momenti, somma di variabili aleatorie

Esercizio 1

Una variabile aleatoria X ha PDF pari a $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ Determinare: a) $E(X)$, b) $E(2X + 5)$, c) $E(X^2)$

Esercizio 2

Una variabile casuale continua ha densità di probabilità pari a

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare: a) $E(X)$, b) $E(X^2)$.

Esercizio 3

Determinare a) la varianza, b) la deviazione standard della variabile casuale dell'esercizio precedente.

Esercizio 4

Sia X una variabile la cui funzione di densità è $f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Determinare a) $\text{Var}(X)$, b) σ_X .

Esercizio 5

Sia X una variabile la cui funzione di densità è $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Determinare a) $\text{Var}(X)$, b) σ_X .

Esercizio 6

La funzione di ripartizione di una variabile casuale V è $F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < -5 \\ (v+5)^2/144 & -5 \leq v < 7 \\ 1 & v \geq 7 \end{cases}$

a) Qual è $E[V]$? b) Qual è la $\text{Var}[V]$? c) Qual è $E[V^3]$?

Esercizio 7

La variabile casuale X ha funzione di densità $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Determinare a) la funzione generatrice dei momenti e b) i primi quattro momenti intorno all'origine

Esercizio 8

Determinare i primi quattro momenti a) intorno all'origine, b) intorno alla media di una variabile casuale X la cui funzione

di densità è $f_X(x) = \begin{cases} 4x(9-x^2)/81 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Esercizio 9

Sia X una variabile aleatoria Gaussiana $N[0, \sigma^2]$. Si usi la funzione generatrice dei momenti per trovare i primi quattro momenti di X .

Esercizio 10

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti ciascuna con densità $f(u) = \begin{cases} 2e^{-2u} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Determinare a) $E[X + Y]$, b) $Var[X + Y]$

Esercizio 11

Si supponga che durante un giorno i -esimo di Dicembre l'energia X_i accumulata da un pannello solare sia ben modellata da una variabile aleatoria Gaussiana con una media pari a $32 - i/4$ kW/h e una deviazione standard pari a 10 kW/h. Assumendo che l'energia accumulata in ciascun giorno sia indipendente da quella accumulata in qualsiasi altro, qual è la funzione di distribuzione di Y , ovvero l'energia totale accumulata nei 31 giorni di dicembre?

Esercizio 12

Alcuni ingegneri civili ritengono che il peso in tonnellate che un braccio di ponte può sopportare senza avere cedimenti strutturali possa descriversi con densità gaussiana di media 180 tonnellate e deviazione standard 18 tonnellate. Supponiamo che il peso (espresso in tonnellate) di una macchina sia una variabile aleatoria di media 1 e deviazione standard 0.1 tonnellate. Quante macchine devono essere sul braccio del ponte perché la probabilità di un danno strutturale superi 0.1?

Esercizio 13

La variabile casuale X misura in millisecondi il tempo totale di accesso (attesa più lettura) al disco di un calcolatore per acquisire un blocco di informazioni. X è distribuita uniformemente tra 0 e 12 millisecondi. Prima di effettuare una data operazione il calcolatore deve accedere a 12 differenti blocchi di informazione dal disco (siano indipendenti i tempi di accesso a blocchi diversi). Sia A la variabile aleatoria in millisecondi corrispondente al tempo totale di accesso a tutte le informazioni. a) Quale è il valore atteso $E[X]$ di accesso? b) Quale è la varianza $Var[X]$? c) Quale è $E[A]$, il valore atteso del tempo totale di accesso? d) Quale è la deviazione standard σ_A del tempo totale di accesso? e) Si usi il teorema del limite centrale per stimare la probabilità $P[A > 75ms]$. f) Si usi il teorema del limite centrale per stimare $P[A < 48ms]$.

CAPITOLO 8

La distribuzione gaussiana e applicazioni alle funzioni di distribuzione di probabilità continue

8.1 La distribuzione gaussiana

Esercizio 1

Siano X e Y variabili casuali gaussiane aventi entrambi media $\mu = 0$ e varianza rispettivamente $\sigma_X^2 = 1$ e $\sigma_Y^2 = 4$.

- Si traccino sovrapponendoli i grafici delle PDF delle due variabili: f_X ed f_Y
- Che cos'è $P[-1 < X \leq 1]$?
- Che cos'è $P[-1 < Y \leq 1]$?
- Che cos'è $P[X \geq 2.5]$?
- Che cos'è $P[Y \geq 2.5]$?

Esercizio 2

Supponete di aver sostenuto un test, e che il valore atteso dal risultato sia 61, mentre la deviazione standard sia 10. Avete ottenuto 46. Qual è il vostro risultato espresso rispetto alla normale standard?

Esercizio 3

Se X è una variabile gaussiana con $\mu = 61$ e $\sigma = 10$, quanto vale $P[X \geq 46]$?

Esercizio 4

Se X è una variabile gaussiana con $\mu = 61$ e $\sigma = 10$, quanto vale $P[51 < X \leq 71]$?

Esercizio 5

La distribuzione del numero di un certo tipo di batteri in un ml di acqua tende alla distribuzione di Gauss $\mathcal{N}(85, 81)$. Qual è la probabilità che vi siano più di cento batteri di quel tipo in un ml di acqua?

Esercizio 6

La temperatura di picco, in gradi Fahrenheit, in un giorno di luglio in Irlanda è una variabile casuale gaussiana con una media di 85 e una deviazione standard pari a 10. Quale è la probabilità a) $P[T > 100]$, b) $P[T < 60]$, c) $P[60 < T \leq 100]$?

Esercizio 7

Determinare l'area sotto la curva normale standard a) tra $z=0$ e $z=-1.2$; b) tra $z=-0.68$ e $z=0$; c) tra $z=-0.46$ e $z=2.21$, d) tra $z=0.81$ e $z=1.94$; e) alla destra di -1.28 .

Esercizio 8

Sia X la quantità di radiazioni che possono essere assorbite da un individuo prima di subire un danno irreparabile: X è una gaussiana $\mathcal{N}(500, 150^2)$. Trovare il livello di dosaggio al di sopra del quale sopravvive solo il 5% delle persone esposte a radiazioni.

Esercizio 9

Tra le donne degli Stati Uniti di età compresa tra i 18 e i 74 anni, la pressione diastolica è distribuita in modo approssimativamente gaussiano con media $\mu = 77$ mmHg e deviazione standard $\sigma = 11$ mmHg. a) Quale proporzione di donne di questa popolazione ha una pressione diastolica compresa tra 88 e 99 mmHg? b) Quale tra 60 e 90?

Esercizio 10

Il diametro interno di 200 guarnizioni prodotte da una macchina è di 0.502 pollici e la deviazione standard è 0.005 pollici. Gli scopi per le quali queste guarnizioni sono prodotte permettono una tolleranza massima nel diametro fra 0.496 e 0.508 pollici, mentre in caso contrario le guarnizioni sono considerate difettose. Assumendo una distribuzione delle guarnizioni difettose, si determini la percentuale delle guarnizioni difettose prodotte dalla macchina.

Esercizio 11

La lunghezza media di 500 spighe di frumento in un test biologico è di 151 cm e la deviazione standard è di 15 cm. Supponendo che le lunghezze siano distribuite normalmente, determinare quante spighe hanno lunghezza a) compresa tra 120 e 155 cm b) maggiore di 185 cm.

Esercizio 12

Da un'indagine condotta su 1000 bambini di pari età (8 anni), è risultato che il 10% ha un peso inferiore a 21 Kg e l'87.5% ha un peso compreso tra 21 e 35 Kg. Sapendo che la distribuzione dei pesi è approssimativamente gaussiana, a) calcolare media e deviazione standard del peso della popolazione di bambini; b) qual è la probabilità di osservare un bambino con peso maggiore di 22.5 Kg?

8.2 Esercizi vari e applicazioni alle funzioni di distribuzione di probabilità continue

Esercizio 13

Calcolare in modo approssimato la probabilità di ottenere in 100 lanci di una moneta equa un numero di teste compreso tra 45 e 55 (inclusi).

Esercizio 14

Data un'urna con $b=9$ palline bianche e $r=16$ palline rosse, qual è il minimo numero di estrazioni con reimmissione che garantisce di ottenere un numero di palline bianche pari ad una frazione di n compresa fra $4/25$ e $14/25$ con probabilità maggiore di 0.96?

Esercizio 15

Due amici, Ugo e Dino, si danno appuntamento all'ora t_0 . I loro tempi di arrivo sul luogo dell'appuntamento, rispettivamente T_U e T_D sono variabili aleatorie indipendenti con uguale distribuzione $N(0, 25)$. I tempi sono espressi in minuti. a) Calcolare la probabilità che Ugo debba attendere più di dieci minuti l'arrivo di Dino.

Esercizio 16

Siano Z_1 e Z_2 due v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con legge esponenziale di densità $f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z} I_{(0, +\infty)}(z)$ $\lambda > 0$. Si ponga $Y = Z_1 + Z_1 Z_2$. Trovare a) $E(Z)$, b) $E(Y)$ e c) $\text{Var}(Y)$.

Esercizio 17

Paperino lancia tre volte un dado regolare: se il numero 1 esce k volte ($k = 1, 2, 3$) allora gli viene restituita k volte la posta che ha messo in gioco, se invece il numero 1 non esce mai perde la posta. Sia X la variabile aleatoria "vincita in una giocata in cui la posta è uguale ad 1 euro": quindi X vale -1 se Paperino perde la giocata, mentre X vale $k-1$ se nei tre lanci del dado esce k volte la faccia 1. a) Calcolare la densità discreta e il valore atteso di X . b) Paperino ha un capitale iniziale di un euro e due giocate a disposizione. Sia X_i ($i = 1, 2$) la vincita di Paperino all' i -esima giocata. Quale è la probabilità che Paperino rimanga senza soldi?

Esercizio 18

Sia Y una variabile aleatoria esponenziale con varianza $\text{Var}[Y] = 25$. a) Qual è la PDF di Y ? b) Qual è la $E[Y^2]$? c) Quanto vale $P[Y > 5]$?

Esercizio 19

Sia X una variabile aleatoria distribuita uniformemente tra $[-5, 5]$: a) Qual è la PDF $f_X(x)$? b) Qual è la CDF $F_X(x)$? c) Qual è $E[X]$? d) Qual è la $E[X^2]$? e) Quanto vale $E[e^X]$?

Esercizio 20

Un professore paga 25 centesimi per ogni errore fatto alla lavagna durante una lezione a quegli studenti che lo mettano in evidenza. In una carriera di n anni con una serie di errori fatti alla lavagna, la quantità di euro pagati dal professore può essere approssimata ad una variabile aleatoria gaussiana Y_n con valore atteso $40n$ e varianza $100n$. Qual è la probabilità che Y_{20} superi 1000? Per quanti anni deve insegnare il professore affinché $P[Y_n > 1000] > 0.99$

Esercizio 21

Quando si effettua una chiamata telefonica la linea è occupata con probabilità 0.2 e non si ha risposta con probabilità 0.3. La variabile aleatoria X descrive il tempo di conversazione in minuti di una chiamata che abbia ottenuto risposta. X ha distribuzione esponenziale con media 3 minuti. Sia ora W una v.a. che descrive il tempo di conversazione di una chiamata qualunque ($W=0$ significa nessuna risposta oppure linea occupata). a) Calcolare $F_W(w)$ b) Calcolare $f_W(w)$ c) Calcolare media e varianza di W .

Esercizio 22

Nell'80% delle lezioni un professore arriva in orario e inizia la lezione con ritardo $T=0$; quando invece è in ritardo egli inizia la lezione con un ritardo T uniformemente distribuito tra 0 e 300 secondi. Calcolare CDF e PDF di T .

Esercizio 23

Un compact disc contiene campioni digitalizzati di un'onda sonora; ogni campione analogico viene rappresentato in digitale con un'accuratezza di $\pm 1\text{mV}$. Il CD sovracampiona l'onda sonora effettuando 8 differenti misure indipendenti dello stesso campione, le quali vengono poi mediate, e la media utilizzata come valore campione. Qual è la probabilità che l'errore nella forma d'onda sia maggiore di 0.1mV ?

Esercizio 24

Un modem trasmette un milione di bit, ciascuno dei quali è 0 o 1 in modo indipendente con pari probabilità. Si stimi la probabilità di avere almeno 502000 bit a uno.

Esercizio 25

Una chiamata telefonica può essere identificata come chiamata vocale V se qualcuno parla oppure chiamata di dato D se si tratta di modem o fax. Le chiamate vocali o di dato sono tra loro indipendenti. In base ad un gran numero di osservazioni si sa che $P[V] = 0.8$ e $P[D] = 0.2$. La variabile aleatoria K_n è il numero di chiamate di dato su un numero n di chiamate. Calcolare: a) $E[K_{100}]$ b) Si usi il teorema del limite centrale per stimare la probabilità di avere almeno 18 chiamate vocali su 100 chiamate c) Si usi il teorema del limite centrale per stimare la probabilità di avere $P[16 \leq k_{100} \leq 24]$

Esercizio 26

Orazio collauda certi pezzi con uno strumento che è in grado di identificarne uno difettoso con probabilità $p=90\%$. Egli prende $N=50$ pezzi difettosi e sottopone ciascuno di essi a un primo collaudo; poi prende quelli che, pur difettosi, hanno superato il primo test e li sottopone a un secondo collaudo. a) Riconoscere la distribuzione della v.a. X_1 che conta quanti dei 50 pezzi iniziali non hanno superato il primo collaudo (cioè sono stati identificati come difettosi); b) detta X_2 la v.a. che conta quanti dei pezzi sottoposti al secondo collaudo non lo superano, calcolare la probabilità che tutti i 50 pezzi iniziali non superino i due collaudi, $P(X_1 + X_2 = 50)$

Esercizio 27

La percentuale di realizzazione nei tiri da due punti di un giocatore di pallacanestro è del 55%. a) Qual è la probabilità che segni non più di 50 punti in 50 tiri? b) Qual è il numero minimo di tiri che deve effettuare affinché la probabilità di segnare almeno 100 punti sia maggiore o uguale a 0.9?

Esercizio 28

I mezzi meccanici prodotti da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 20 cm; sono accettabili pezzi entro limiti di tolleranza da 19.5 a 20.5 cm. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti sono in realtà distribuite normalmente intorno ad una media di 20 cm con deviazione standard di 0.25 cm. a) Quale percentuale dei pezzi non rispetta i limiti di tolleranza? b) Potendo ricalibrare la linea di produzione, a quale valore dobbiamo ridurre la deviazione standard se vogliamo che il 99% dei pezzi rispettino i limiti di tolleranza?

Esercizio 29

Sia X una variabile aleatoria esponenziale di media $1/\lambda$. a) Calcolare la densità di $T = X^2$, b) Calcolare $E(X^2)$.

Esercizio 30

Una moneta regolare viene lanciata 4 volte. Mediamente, quante volte succede che testa sia seguita immediatamente dopo da croce?

Esercizio 31

Si lancino in successione due monete equilibrate. Sia X il numero di esiti "testa" per le prime due monete e Y il numero di esiti "croce" per le ultime due. a) Si determini $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$; b) X e Y sono indipendenti?

Esercizio 32

(T.E 28/03/2001) Sia T la durata della vita, misurata in centinaia di anni. Supponiamo che in una data popolazione la densità di probabilità di T sia

$$f(t) = \begin{cases} 12t^2(1-t) & \text{set } \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- trovare la durata media della vita e la sua varianza
- calcolare il rischio di morte all'istante t , dove si ricorda che la funzione di rischio è definita come $R(t) = f(t)/[1 - F(t)]$, essendo F la funzione di ripartizione
- Trovare la probabilità che una persona muoia tra i 70 e gli 80 anni, sapendo che è vissuta fino a 70 anni.
- Dato un campione di n individui, dire a quale variabile casuale tende, per $n \rightarrow +\infty$ la variabile aleatoria $n^{-1} \sum_{i=1}^n T_i$, essendo T_i la variabile aleatoria che descrive la durata della vita dell' i -esima persona ($i = 1, \dots, n$).

Esercizio 33

(T.E. 25/07/2001) Un'azienda produce sferette di metallo il cui raggio R ha legge di probabilità uniforme nell'intervallo $(0, [4\pi/3]^{1/3})$.

- Determinare la legge di probabilità del volume V delle sferette
- Determinare la media e la varianza di V
- Calcolare la probabilità che una sferetta abbia volume minore della metà del volume medio
- Supponiamo di avere un lotto di 1000 sferette. Lo si considera inaccettabile se più del 10% delle sferette ha volume inferiore alla metà del volume medio. Stimare la probabilità che ciò accada.

Esercizio 34

(T.E 25/07/2000) Si definisca il concetto di variabile aleatoria continua e di funzione di ripartizione. Si consideri poi un v.a.c. X con densità di probabilità data da

$$f_X(t) = \begin{cases} ate^{2t} & t \leq -3 \\ 0 & t > -3 \end{cases}$$

Calcolare a) la costante a ; b) la funzione di ripartizione di X ; c) $E(X)$; d) la densità di $Y = X^2$

Esercizio 35

(T.E. 19/09/2000) Una variabile aleatoria continua X ha densità di probabilità data da $f(x) = a(1 + 9x^2)^{-1}$ per $-1 \leq x \leq 0$ e $f(x) = 0$ al di fuori. Determinare a) il parametro $a > 0$, b) la funzione di ripartizione di X e tracciarne il grafico qualitativo c) la media e la varianza di X d) la funzione di ripartizione e la densità di $Y = X^2$

Esercizio 36

Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità $1/2$ di essere prodotta dal primo macchinario, $1/4$ dal secondo e $1/4$ dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. a) Qual è la probabilità che trovi almeno un occhiale difettoso? b) Se l'ottico ne trova esattamente due paia difettose, qual è la probabilità che gli occhiali della scatola ricevuta dall'ottico fossero stati prodotti dal primo macchinario?

Esercizio 37

Uno strumento di misura è affetto da un errore casuale X . Se l'esperimento viene eseguito ad una temperatura superiore ai 20 gradi la distribuzione di X è Gaussiana di media 0 e varianza $1/4$, mentre se si riesce a mantenere la temperatura al di sotto della soglia critica di 20 gradi la distribuzione di X è Gaussiana di media 0 e varianza $1/9$. Si è constatato che solo nel 20% dei casi si riesce a mantenere la temperatura inferiore ai 20 gradi per tutta la durata dell'esperimento. a) Qual è la probabilità di $E = \{-0.8 \leq X \leq 0.8\}$? b) Se si verifica E , qual è la probabilità che la misura sia stata effettuata mantenendo la temperatura al di sotto dei 20 gradi?

Esercizio 38

Si consideri la funzione $f(x) = kxe^{-x^2}$, se $x \geq 0$, e 0 altrove. a) Determinare la costante k per cui f è la densità di una variabile aleatoria; b) Calcolare $P(X \leq 1)$ e $P(X < 1)$.

Esercizio 39

Supponiamo di avere due urne chiamate urna a e urna b. Nell'urna a ci sono 5 biglie bianche e 2 nere, mentre nell'urna b ci sono 3 biglie bianche e una sola nera. Lanciamo una moneta truccata in modo tale che la probabilità che venga testa sia $1/3$. Se otteniamo testa estraiamo una biglia dall'urna a altrimenti ne estraiamo una dall'urna b. a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera; b) Sapendo che si è estratta una biglia nera, calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sulla moneta.

Esercizio 40

La probabilità che una studente preparato fallisca l'esame è uguale a 0.04 mentre la probabilità che uno studente non preparato passi l'esame è uguale a 0.07. Supponendo che il 60% degli studenti si presentino preparati all'esame, qual è la probabilità che uno studente che è stato bocciato fosse preparato?

Esercizio 41

L'urna U1 contiene due palline bianche e due nere. L'urna U2 contiene 3 palline bianche e due nere. Si trasferisce una pallina da U1 in U2, quindi si estrae da U2 una pallina che risulta essere bianca. Qual è la probabilità che la pallina trasferita fosse bianca?

Esercizio 42

Topolino è appassionato di pesca, in particolare ama pescare trote. per questo si reca nella "Valle della trota". La valle è famosa per i suoi due laghi, il "Lago d'Oro" ed il "Lago d'argento", entrambi pescosissimi, ma mentre il primo è popolato interamente da trote per il secondo si stima che solo il 60% dei pesci in esso presenti siano trote (le uniche prede di interesse per Topolino). Topolino arriva al bivio tra i due laghi ma non ricorda quale dei due sia quello con più trote, così rimette la scelta del lago al caso lanciando una moneta equilibrata. Topolino è un ottimo pescatore e sicuramente pescherà almeno un pesce, inoltre essendo uno sportivo quando pesca un pesce smette di pescare per l'intera giornata. a) Calcolare la probabilità che il pesce pescato da Topolino sia una trota; b) Sapendo che Topolino ha pescato una trota, calcolare la probabilità che l'abbia pescata dal "Lago d'Oro"; c) Il giorno seguente, rincuorato dalla giornata precedente torna al lago del giorno precedente. Calcolare la probabilità che che peschi una trota (sapendo che il giorno prima ne ha pescata solo una e che i risultati della pesca in uno stesso lago in due giorni differenti possono essere considerati indipendenti.)

Esercizio 43

Pennino possiede 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Pennino sceglie a caso una delle 5 monete e la lancia 3 volte. a) Calcolare la probabilità di ottenere 3 teste; b) Supponiamo che dopo aver lanciato 3 volte la moneta Pennino abbia ottenuto 3 teste. Ora Pennino è erroneamente convinto che lanciando la stessa moneta una quarta volta otterrà croce con grande probabilità. Calcolare la probabilità di ottenere croce al quarto lancio sapendo che nei primi tre si è ottenuto testa. c) Supponendo che al quarto lancio Pennino abbia ottenuto ancora testa calcolare la probabilità che la moneta che Pennino ha lanciato quattro volte sia una di quelle truccate.

Esercizio 44

Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X = k(x^2 + 1)$ se $x \in (0, 1)$, mentre vale 0 altrove. a) determinare il valore della costante k ; b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X di X .

Esercizio 45

Si consideri una sistema elettronico composto da $n=1000$ componenti e che funziona se e solo se almeno $k = 2$ componenti su n funzionano. Si supponga inoltre che tutte le componenti abbiano la stessa affidabilità $p=0.005$ e che funzionino indipendentemente una dall'altra. Qual è approssimativamente l'affidabilità del sistema appena descritto?