

---

---

## CAPITOLO 2

---

# Trasformate di Laplace

## 2.1 Trasformate

*Richiami teorici*

La trasformata di Laplace unilatera è la funzione  $X(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

dove l'insieme  $\alpha_x = \inf\{s : s \in \text{dom}(X)\}$  è detta ascissa di convergenza.

Si dimostrano di seguito le proprietà della trasformata unilatera.

### Linearità

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)](s) = aX(s) + bY(s)$$

se  $a, b \in \mathbb{R}$  e se  $s > \max\{\alpha_x, \alpha_y\}$ .

La dimostrazione è immediata e segue dalla proprietà di linearità dell'integrale.

### Traslazione

$$\mathcal{L}[x(t-a)u(t-a)](s) = e^{-as}X(s)$$

se  $a \in \mathbb{R}$  e  $s > \alpha_x$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t-a)u(t-a)](s) &= \int_a^{+\infty} x(t-a)e^{-st} dt \quad \text{ponendo } t = r+a \\ &= \int_0^{+\infty} x(r)e^{-(r+a)s} dr = e^{-sa} \int_0^{+\infty} x(r)e^{-rs} dr \\ &= e^{-as}X(s) \end{aligned}$$

### Modulazione

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s) = X(s-a)$$

con  $a \in \mathbb{R}$  e  $s > a + \alpha_x$

Per definizione infatti si ha

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{at}x(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-(s-a)t} dt = X(s-a)$$

per ogni  $s > a + \alpha_x$

**Scalamento**

$$\mathcal{L}[x(at)](s) = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

con  $a > 0$  per ogni  $s > a\alpha_x$

Infatti

$$\mathcal{L}[x(at)](s) = \int_0^{+\infty} x(at)e^{-st}dt \quad \text{ponendo } t=r/a \text{ si ha } \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x(r)e^{-sr/a}dr = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

per ogni  $s > a\alpha_x$

**Derivazione rispetto ad  $s$** 

$$-\frac{d}{ds}X(s) = \mathcal{L}[tx(t)](s)$$

per ogni  $s > \alpha_x$ .

Poiché è possibile dimostrare che è lecito scambiare l'ordine tra derivazione ed integrazione si ha:

$$X'(s) = \frac{d}{ds} \left( \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} \left( x(t)e^{-st} \right) dt = \int_0^{+\infty} x(t) \left( -te^{-st} \right) dt = -\mathcal{L}[tx(t)](s)$$

**Derivazione rispetto a  $t$** 

$$\mathcal{L}[x'(t)u(t)](s) = sX(s) - x(0^+)$$

con  $s > \max\{\alpha_x, \alpha_{x'}\}$

. Applicando la definizione di trasformata bilatera si ricava che

$$\mathcal{L}[x'(t)](s) = sX(s)$$

Per ricavare la soluzione nel caso della trasformata unilatera si può far riferimento alle proprietà della derivata:

$$\begin{aligned} [x(t)u(t)]' &= x'(t)u(t) - x(t)u'(t) \\ &= x'(t)u(t) - x(t)\delta(t) \\ &= x'(t)u(t) - x(0)\delta(t) \end{aligned}$$

ne segue che

$$x'(t)u(t) = [x(t)u(t)]' - x(0)\delta(t)$$

Dunque la trasformata cercata sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'(t)u(t)](s) &= \mathcal{L}[(x(t)u(t))' - x(0)\delta(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[(x(t)u(t))'](s) - x(0)\mathcal{L}[\delta(t)](s) \\ &= sX(s) - x(0^+) \end{aligned}$$

Tale proprietà può essere applicata in successione; la trasformata della derivata seconda sarà infatti:

$$\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+)$$

**Trasformata della convoluzione**

$$\mathcal{L}[(x * y)(t)](s) = X(s)Y(s)$$

con  $s > \max\{\alpha_x, \alpha_{x'}\}$  dove il prodotto di convoluzione tra due funzioni è definito come:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-r)g(r)dr$$

Dunque risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(x * y)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (x * y)(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-r)y(r)dr \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x(t-r)y(r)dr \right) e^{-st} dt \quad \text{poiché per ipotesi } y(r) \text{ è nulla per } r < 0 \end{aligned}$$

operando ora un cambio di variabili:  $u = t - r$  si ottiene

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} y(r) \int_0^{+\infty} x(t-r)e^{-st} dr = \int_0^{+\infty} y(r)e^{-sr} \left( \int_0^{+\infty} x(u)e^{-su} du \right) dr \\ &= \left( \int_0^{+\infty} y(r)e^{sr} \right) \left( \int_0^{+\infty} x(u)e^{-su} du \right) = X(s)Y(s) \end{aligned}$$

**Integrale della trasformata**

$$\int_s^{+\infty} X(r)dr = \mathcal{L}\left[\frac{x(t)}{t}\right](s)$$

per  $s > \alpha_x$  che deriva direttamente dalla proprietà di derivazione rispetto a  $s$ .

**Trasformata dell'integrale**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(r)dr\right](s) = \frac{X(s)}{s}$$

per  $s > \max\{0, \alpha_x\}$  che deriva dalla proprietà di derivazione rispetto a  $t$

**Trasformata di funzioni periodiche**

Dato un segnale  $x_0(t)$  la caratteristiche del quale siano:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e si abbia

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t - nT)$$

allora

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t - nT)\right](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}[x_0(t)](s) \cdot e^{-nTs} = \mathcal{L}[x_0(t)](s) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs} = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)](s)}{1 - e^{-Ts}}$$

**Esercizio 1**

Ricavare usando la definizione la trasformata di Laplace unilatera di:

$$a) f(t) = e^{\alpha t} u(t) \quad b) f(t) = t e^{\alpha t} u(t) \quad c) f(t) = t^n e^{\alpha t} u(t)$$

*Risoluzione*

$$a) \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \right]_0^\tau = \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{se } s > \alpha$$

$$b) \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{(\alpha-s)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[ \frac{t}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \right]_0^\tau - \frac{1}{\alpha-s} \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt$$

$$= - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{(\alpha-s)t}}{(\alpha-s)^2} \right]_0^\tau = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

$$c) \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad \text{si dimostra}$$

**Esercizio 2**

Usando i risultati precedenti ricavare la trasformata di Laplace di:

$$a) f(t) = 1 \cdot u(t) \quad b) f(t) = t \cdot u(t) \quad c) f(t) = t^2 \cdot u(t) \quad d) f(t) = t^6 \cdot u(t)$$

*Risoluzione*

Utilizzando la relazione c) dell'esercizio precedente si ha:

$$a) n = 0, \alpha = 0 \text{ quindi } \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s}$$

$$b) n = 1, \alpha = 0 \text{ quindi } \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2}$$

$$c) n = 2, \alpha = 0 \text{ quindi } \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2}{s^3}$$

$$d) n = 6, \alpha = 0 \text{ quindi } \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{6!}{s^7}$$

**Esercizio 3**

Usando la proprietà di linearità della trasformata ricavare la trasformata di:

$$a) f(t) = \cos(\omega t) u(t) \quad b) f(t) = \sin(\omega t) u(t)$$

*Risoluzione*

È necessario in primo luogo ricavare la trasformata di  $\sin(t)$  e di  $\cos(t)$  per poi applicare la proprietà di scalamento.

Ricordando che

$$f(t) = \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

e applicando alla definizione di trasformata si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} (e^{jt} - e^{-jt}) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} (e^{-(s-j)t} - e^{-(s+j)t}) dt = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(s-j)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} -e^{-(s+j)t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ -\frac{1}{s-j} e^{-(s-j)t} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s+j} e^{-(s+j)t} \right]_0^{+\infty} = \text{che convergono se } s-j > 0 \text{ e } s+j > 0 \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{s+j-s-j}{s^2-j^2} \\ &= \frac{2j}{2j(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin(t)u(t)](s)\end{aligned}$$

Con trasformazioni analoghe si ricava la trasformata del coseno. Ricordando che

$$f(t) = \cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

e applicando alla definizione di trasformata si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{jt} + e^{-jt}) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-(s-j)t} + e^{-(s+j)t}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(s-j)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} -e^{-(s+j)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{s-j} e^{-(s-j)t} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s+j} e^{-(s+j)t} \right]_0^{+\infty} = \text{che convergono se } s-j > 0 \text{ e } s+j > 0 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+j+s-j}{s^2-j^2} \\ &= \frac{2s}{2(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}[\cos(t)u(t)](s)\end{aligned}$$

A questo punto è possibile ricavare la trasformata richiesta dall'esercizio attraverso due metodi: l'uso della definizione, ove tuttavia l'argomento del seno (e dunque degli esponenziali complessi) sarà differente, oppure attraverso la proprietà di scalamento:

$$a) \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[\cos(t)]\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

In modo analogo per il seno si ottiene:

$$b) \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

#### Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Laplace unilatera di  $f_1(t) = \sin(t)$  supponendo nota la trasformata unilatera di  $f_2(t) = \cos(t)$

*Risoluzione*

Osserviamo che  $\cos'(t) = -\sin(t)$  dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(t)u(t)](s) &= \mathcal{L}[-\cos'(t)u(t)](s) = -\mathcal{L}[\cos'(t)u(t)](s) \\ &= -\left(s\mathcal{L}[\cos(t)u(t)](s) - \cos(0)\right) \\ &= -s \cdot \frac{s}{s^2+1} + 1 = \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

**Esercizio 5**

Calcolare la trasformata delle seguenti funzioni utilizzando le proprietà note. Avendo riconosciuta la proprietà da utilizzare, la si dimostri prima di effettuare il calcolo.

$$\begin{array}{lll} a) f(t) = t\sin(t)u(t) & b) f(t) = t^2\sin(t)u(t) & c) f(t) = \cos^2(t)u(t) \\ d) f(t) = 6\sin(2t)u(t) - 5\cos(2t)u(t) & e) f(t) = (\sin t - \cos t)^2u(t) & f) f(t) = t^3e^{-2t}u(t) \\ g) f(t) = (e^t + \sin(t))^2u(t) & h) f(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t) & i) f(t) = e^{-t/2}\cosh(t)u(t) \\ l) f(t) = \cosh(5t)u(t) + \frac{1}{5}\sinh(5t)u(t) & m) f(t) = \frac{1}{2}(t+2)^2e^t u(t) & n) f(t) = e^{-t/2}(\sin t)^2u(t)\end{array}$$

*Risultati*

$$\begin{array}{l} a) f(s) = \mathcal{L}[t\sin(t)u(t)](s) = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[\sin(t)](s)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\ b) f(s) = \mathcal{L}[t^2\sin(t)u(t)](s) = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[t\sin(t)u(t)](s)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3} \\ c) f(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)u(t)\right](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos(2t)u(t)](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[1u(t)](s) = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2s} = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)} \\ d) f(s) = \frac{12-5s}{s^2+4} \\ e) f(s) = \mathcal{L}[(\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin(t) \cdot \cos(t))u(t)](s) = \mathcal{L}[(1 - \sin(2t))u(t)](s) = \frac{s^2-2s+4}{s(s^2+4)} \\ f) f(s) = \frac{6}{(s+2)^4} \\ g) f(s) = e^{2t} + 2e^t\sin(t) + \sin^2 t = e^{2t} + 2e^t\sin(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2s} + \frac{1}{s-2} - \frac{s}{2(s^2+4)} + \frac{2}{s^2-2s+2} \\ h) f(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+5} \quad i) f(s) = \frac{4s+2}{4s^2+4s-3} \quad l) f(s) = \frac{s+1}{s^2-25} \\ m) f(s) = \frac{1}{2}(t^2e^t + 4te^t + 4e^t) = \frac{2s^2-2s+1}{(s-1)^3} \quad n) f(s) = \frac{16}{(2s+1)(4s^2+4s+17)}\end{array}$$

**Esercizio 6**

Nota la trasformata di Laplace della funzione  $x(t)$ , determinare la trasformata di  $x(2t)$

$$\mathbb{L}[x(t)](s) = \frac{s^2 - s + 1}{(2s + 1)^2(s - 1)}$$

*Risultati*

Si usa la proprietà del cambiamento di scala e si ottiene:

$$f(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{(s+1)^2 (s-2)}$$

**Esercizio 7**

Calcolare la trasformata delle seguenti funzioni utilizzando le proprietà note.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(t) &= t^2 e^{3t} & \text{b)} \quad f(t) &= 3e^{-2t} \cos(6t) - 5e^t \sin(3t) & \text{c)} \quad f(t) &= e^{-2t} \sin(4t) \\ \text{d)} \quad f(t) &= \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}, a, b \in \mathbb{R} & \text{e)} \quad f(t) &= \cos\left(t - \frac{2}{3}\pi\right) & \text{f)} \quad f(t) &= \int_0^t (p^2 - p + e^{-p}) dp \end{aligned}$$

*Risoluzione*

$$\text{a)} \quad f(s) = \frac{2}{(s-3)^3} \quad \text{b)} \quad f(s) = \frac{3(s+2)}{s^2+4s+40} - \frac{15}{s^2-2s+10} \quad \text{c)} \quad f(s) = \frac{4}{(s+2)^2+16}$$

d) Sfruttando la proprietà di trasformazione di  $\frac{x(t)}{t}$  si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{x(t)}{t}\right](s) &= \int_s^{+\infty} (\mathcal{L}[x(t)](r)) dr = \int_s^{+\infty} (\mathcal{L}[e^{-at}](r) - \mathcal{L}[e^{-bt}](r)) dr \\ &= \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r+b}\right) dr = \left[\log|r+a| - \log|r+b|\right]_s^{+\infty} = \left[\log\left|\frac{r+a}{r+b}\right|\right]_s^{+\infty} = \log\left(\frac{s+a}{s+b}\right) \end{aligned}$$

e)  $f(s) = \frac{s}{s^2+1} e^{-\frac{2}{3}\pi s}$  f) Sfruttando la proprietà di trasformazione dell'integrale si ha

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t (p^2 - p + e^{-p}) dp\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[t^2 - t + e^{-t}](s) = \frac{2}{s^4} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s(s+1)}$$

**Esercizio 8**

Calcolare

$$\text{a)} \quad \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sin(t) dt \quad \text{b)} \quad \int_0^{+\infty} t e^{-4t} \sin(t) dt \quad \text{c)} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$$

*Risoluzione*

a) Per la proprietà dell'integrale la trasformata dell'integrale in a) sarà

$$\frac{1}{s} \mathcal{L}[t^3 e^{-t} \sin(t)]$$

Ma per il teorema del valore finale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0}$$

Dunque in questo caso il calcolo della trasformata coincide con il calcolo della funzione integranda da valutare in  $s = 0$ . La trasformata della funzione integranda è

$$\frac{24(s+1)(s^2+2s)}{(s^2+2s+2)^4}$$

che valutata in  $s = 0$  dà come risultato  $X(s) = 0$

Con metodo analogo si ottiene: b)  $\frac{8}{289}$  c)  $\frac{1}{2} \log(2)$

**Esercizio 9**

Ricavare la trasformata di:

- a)  $f(t) = 4e^{5t} + 6e^t - 3\sin 4t + 2\cos 2t$     b)  $f(t) = t^2 e^{3t}$     c)  $f(t) = e^{-2t} \sin 4t$   
 d)  $f(t) = e^{4t} \cosh 5t$     e)  $f(t) = e^{-2t} (3\cos 6t - 5\sin 6t)$   
 f)  $f(t) = \cos(t - 2\pi/3)$     per  $t > 2\pi/3$ ,    0    per  $t < 2\pi/3$

*Risultati*

- a)  $\frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4}$     b)  $\frac{2}{(s-3)^3}$     c)  $\frac{4}{s^2+4s+20}$     d)  $\frac{s-4}{s^2-8s-9}$     e)  $\frac{3s-24}{s^2+4s+40}$     f)  $\frac{s e^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$

**Esercizio 10**

Calcolare la trasformata di Laplace della funzione in figura 2.1 a sinistra  $f(t)$ ; calcolare quindi la trasformata di Laplace della funzione in figura 2.1 a destra  $g(t)$ .

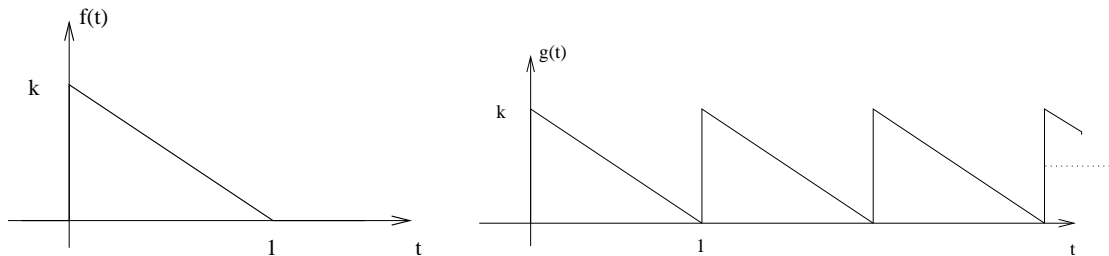


Figura 2.1:

*Risoluzione*

Si può scrivere facilmente per la funzione a sinistra:

$$f(t) = \left(-\frac{k}{1}t + k\right) p_{1/2}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{k}{1}t + k\right) (u(t) - u(t-1)) = ku(t) - ktu(t) + k(t-1)u(t-1)$$

La trasformata si ottiene utilizzando le proprietà della trasformate e si ricava:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{k}{s} - \frac{k}{s^2} + \frac{ke^{-s}}{s^2}$$

La funzione a destra in figura è periodica dove nel periodo fondamentale la funzione è quella analizzata in precedenza. Utilizzando la proprietà di trasformazione della funzione periodica si ottiene:

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{1 - e^{-Ts}}$$

**Esercizio 11**

Calcolare la trasformata di Laplace dell'onda triangolare di picco  $a$  e di periodo  $T = 2a$

*Risultati*

$$f(s) = \frac{1}{s^2} \frac{(1 - e^{-as})^2}{1 - e^{-2as}} = \frac{1}{s^2} \frac{(1 - e^{-as})^2}{(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s^2} \frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} = \frac{1}{s^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{a}{2}s\right)$$

**Esercizio 12**

Determinare l'espressione delle funzioni in figura 2.2 attraverso l'uso della funzione gradino e calcolarne la trasformata di Laplace (la si ricavi sia direttamente, sia, ove possibile sfruttando la proprietà di derivazione della trasformata)

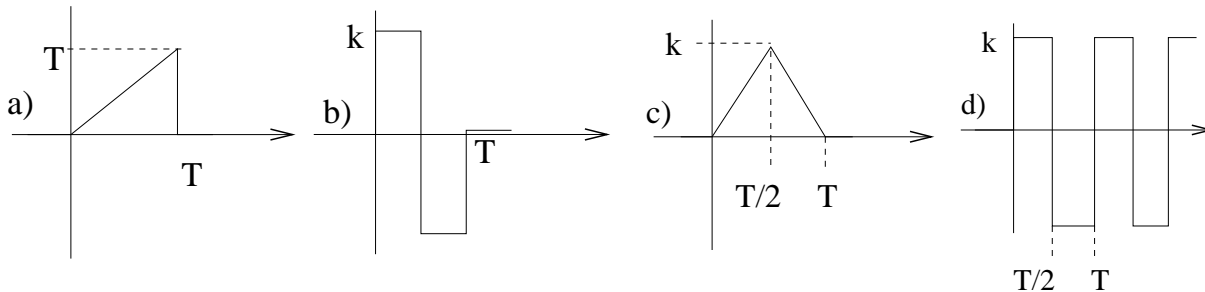


Figura 2.2:

*Risoluzione*

a) La funzione si può descrivere come:  $f(t) = tu(t) - tu(t - T)$ . La trasformata sarà

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathcal{L}[tu(t) - tu(t - T)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[u(t)](s) - \left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[u(t - T)]\right] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{d}{ds}\left(e^{-sT}\mathcal{L}[u(t)](s)\right) \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{-Te^{-sT}s - e^{-sT}}{s^2} \end{aligned}$$

b) La funzione si può descrivere come:  $f(t) = k[u(t) - 2u(t - T/2) + u(t - T)]$ . La trasformata sarà

$$f(s) = \mathcal{L}[k(u(t) - 2u(t - T/2) + u(t - T))](s) = \frac{k}{s}(1 - e^{-\frac{T}{2}s})^2$$

$$c) f(s) = \mathcal{L}\left[\frac{k}{T/2}\left(tu(t) - 2(t - T/2)u(t - T/2) + (t - T)u(t - T)\right)\right](s) = \frac{2k}{Ts^2}\left(1 - e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2$$

$$d) f(s) = \frac{k}{s}tgh\left(\frac{T}{4}s\right)$$

**Esercizio 13**

Calcolare la trasformata di Laplace dei segnali:

$$a) f(t) = \frac{1}{2T}u(t+T)[u(t+T) - u(t-T)] + u(t-T) \quad b) f(t) = u(t)t - u(t-1)e^t + 2u(t-2)\cosh 2t.$$

*Risultati*

$$a) f(s) = \frac{1}{Ts^2}\sinh(sT) \quad b) f(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-(s-1)}}{s-1} + \frac{e^{-2(s-2)}}{s-2} + \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2}$$

**Esercizio 14**

Calcolare la trasformata di Laplace della funzione:

$$x(t) = \begin{cases} (1+t)^2 & 0 < t < 1 \\ 1+t^2 & t \geq 1 \end{cases}$$

*Risoluzione*

La funzione si può scrivere come:

$$x(t) = (1+t)^2[u(t)-u(t-1)]+(1+t^2)u(t-1) = (1+t)^2u(t)+u(t-1)[1+t^2-1-2t-t^2] = [1+2t+t^2]u(t)-2tu(t-1)$$

dato che  $-2t = -2(t-1+1) = -2(t-1) - 2$  allora sostituendo si ottiene

$$x(t) = [1 + 2t + t^2]u(t) - 2(t-1)u(t-1) - 2u(t-1)$$

la cui trasformata è di calcolo immediato:

$$f(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2}e^{-s} - 2 \frac{e^{-s}}{s} = \frac{2}{s^3} + -\frac{2}{s^2}(1 - e^{-s}) + \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s})$$

**Esercizio 15**

Verificare che:

$$\int_0^\pi e^{-st} \sin(t) dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2}$$

*Risultati*

$$\int_0^\pi e^{-st} \sin(t) dt = 1 + e^{-s\pi} - s^2 \int_0^\pi e^{-st} \sin(t) dt$$

**Esercizio 16**

Sia  $x(t)$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita di seguito. Determinarne la trasformata di Laplace.

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

*Risultati*

$$f(s) = \frac{1}{(1 + s^2)(1 - e^{-\pi s})}$$

**Esercizio 17**

Sono date due funzioni  $x(t)$  e  $h(t)$  porta di durata 1 e di ampiezza rispettivamente 1 e 0.5. Se ne calcoli la convoluzione ricavandone il significato grafico.

*Risoluzione*

Si ricordi che il prodotto di convoluzione tra due funzioni è definito come

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

ovvero dato un valore di  $t$  si considera il prodotto della funzione  $x(\tau)$  per la funzione  $h(t - \tau)$ , che cioè è la funzione  $h$  ribaltata rispetto all'asse  $y$  e traslata di un valore parametrico  $t$ , e si calcola l'integrale (l'area) di tale prodotto nell'intervallo nel quale le due funzioni si sovrappongono. Tale parametro  $t$  può variare: per ogni suo valore si ricava un risultato dall'integrale, dunque il risultato sarà in generale funzione di  $t$ . Si osservi che il prodotto di convoluzione è commutativo, dunque il segnale che "scorre" può essere indifferentemente ciascuno dei due.

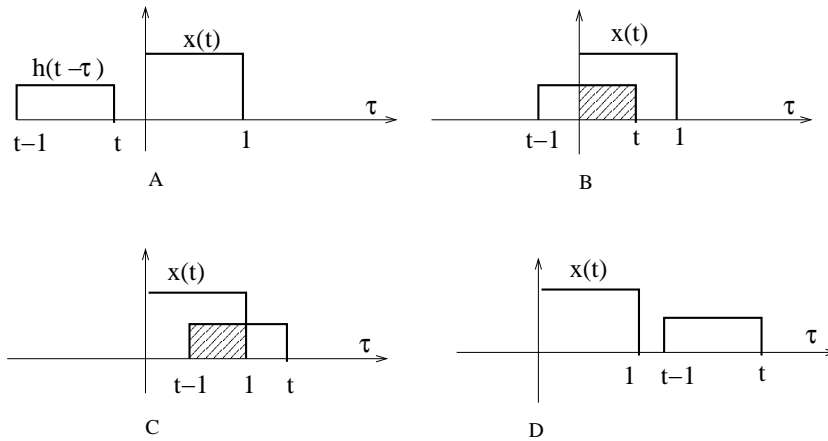


Figura 2.3:

Al variare di  $t$  la relazione tra  $x(\tau)$  e  $h(t-\tau)$  si differenzia, in questo caso, in quattro casi possibili riportati in figura 2.3.

Per ciascuno di questi casi si calcolerà ora l'integrale. Nel caso A le due porte non hanno sovrapposizione, e questo capita per valori del parametro  $t < 0$ . Si ha dunque

$$x(\tau) \cdot h(t-\tau) = 0$$

dunque anche l'integrale è nullo.

Nel caso B, invece, se  $0 < t < 1$  la funzione  $h(t-\tau)$  è sovrapposto alla funzione  $x(t)$  per un intervallo compreso tra 0 e  $t$ , dunque:

$$x(\tau) \cdot h(t-\tau) = 1 \cdot \frac{1}{2}$$

dunque l'integrale diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot \frac{1}{2} d\tau = \left[ \frac{1}{2}\tau \right]_0^t = \frac{1}{2}t$$

Nel caso C la sovrapposizione si ha e ha lo stesso valore del caso B, ma ciò avviene nell'intervallo tra  $t-1$  e 1, nell'intervallo  $1 < t < 2$ . Dunque l'integrale diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{t-1}^1 1 \cdot \frac{1}{2} d\tau = \left[ \frac{1}{2}\tau \right]_{t-1}^1 = 1 - \frac{1}{2}t$$

Nel caso D infine, nell'intervallo  $t-1 > 1$  ovvero  $t > 2$  nuovamente non c'è sovrapposizione tra i due grafici.

Complessivamente dunque il risultato della convoluzione è:

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t & 0 < t < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

che si può scrivere anche come

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{2}tu(t) - 2\frac{1}{2}tu(t-1) + \frac{1}{2}(t-2)u(t-2)$$

rappresentato in figura 2.4.

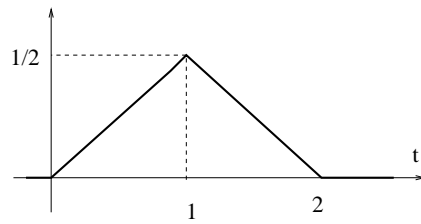


Figura 2.4:

Dunque ci si deve attendere in generale che la convoluzione di due porte aventi lo stesso supporto abbia come risultato un triangolo e viceversa. Questo risultato verrà sfruttato nell'esercizio 18. Generalizzando inoltre, ci si aspetta che se le due porte hanno supporto compreso tra 0 e  $T$  e hanno valore  $M$  e  $N$ , la loro convoluzione sarà un triangolo compreso tra 0 e  $2T$  con picco in  $T$  di valore  $NMT$  (il valore massimo si ha quando i due rettangoli sono perfettamente sovrapposti). Ancora più in generale, se le due porte hanno supporto compreso tra  $-T/2$  e  $T/2$  (complessivamente  $T$ ) e di valore  $M$  ed  $N$  nel supporto, il risultato sarà un triangolo di supporto  $-T$  e  $T$  con picco in 0 di valore  $MNT$  (si invita il lettore a ripetere i passaggi precedenti con i nuovi dati).

### Esercizio 18

Si ricavi la trasformata di Laplace delle funzioni (A, B, C, D) riportate in figura 2.5.

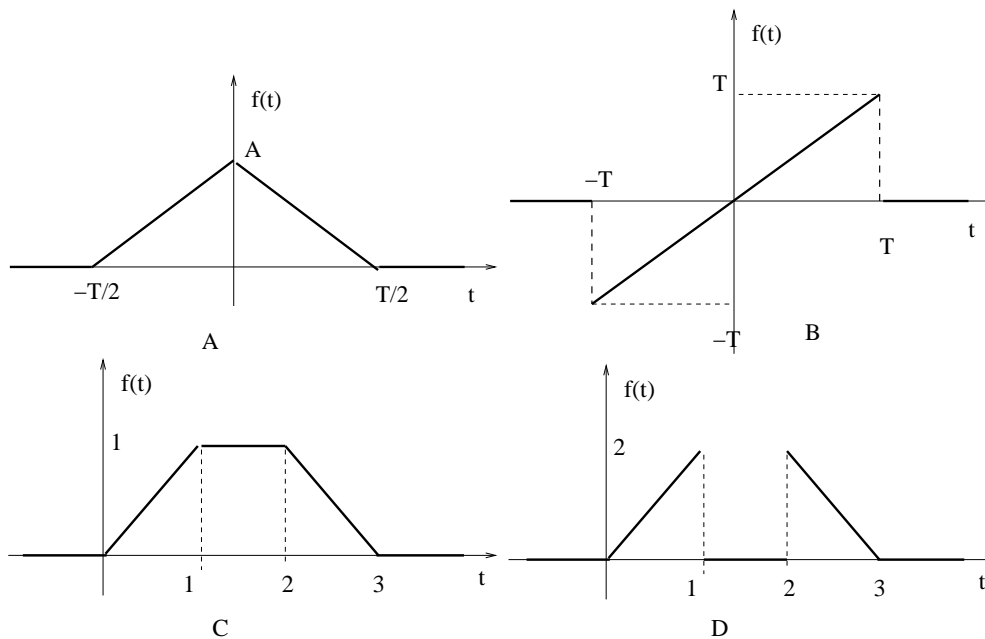


Figura 2.5:

#### Risoluzione

Per la funzione nel grafico A il risultato si può ottenere in 4 modi differenti che verranno nel seguito analizzati.

Dall'esercizio a pagina 10 del capitolo 1 si ricava l'espressione della funzione:

$$f(t) = \left(\frac{2A}{T}t + A\right) \cdot u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \left(A - \frac{2A}{T}t\right) \cdot u\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{4A}{T} \cdot t \cdot u(t) \quad (2.1)$$

Soluzione 1: Definizione.

Attraverso la definizione si calcola la trasformata come:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{2A}{T}t + A \right) \cdot u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \left( A - \frac{2A}{T}t \right) \cdot u\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{4A}{T} \cdot t \cdot u(t) \right) e^{-sT} dt$$

Il calcolo è relativamente lungo ma non complesso e si invita il lettore a completarlo.

Soluzione 2: Proprietà

Utilizzando le proprietà della trasformata l'espressione (2.1) si può trasformare direttamente ed elaborare mediante i passaggi riportati di seguito:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{A}{T/2} e^{\frac{T}{2}s} \frac{1}{s^2} + -2 \frac{A}{T/2} \frac{1}{s^2} + \frac{A}{T/2} e^{-\frac{T}{2}s} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{A}{T/2} \frac{1}{s^2} \left( e^{\frac{T}{2}s} - 2 + e^{-\frac{T}{2}s} \right) = \frac{A}{T/2} \frac{1}{s^2} \left( e^{\frac{T}{4}s} - e^{-\frac{T}{4}s} \right)^2 \\ &= \frac{A}{T/2} \frac{1}{s^2} \left( 4 \cdot \frac{e^{\frac{T}{4}s} - e^{-\frac{T}{4}s}}{4} \right)^2 = \frac{A}{T/2} \frac{2}{s^2} \left( \sinh\left(\frac{T}{4}s\right) \right)^2 \end{aligned}$$

Soluzione 3: derivate successive

Come ricavato nell'esercizio 4 del capitolo 2 è facile ricavare sia graficamente che analiticamente la derivata seconda della funzione. La derivata seconda è infatti

$$f''(t) = \frac{2A}{T} \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) + \frac{2A}{T} \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{4A}{T} \cdot \delta(t)$$

rappresentata in figura 1.16.

Poiché è noto che:

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2 \mathcal{L}[f(t)](s)$$

allora si ha

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f''(t)](s)$$

Dunque è sufficiente ricavare la trasformata della derivata seconda della funzione e dividerla per  $s^2$  per ricavare la trasformata desiderata:

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = \frac{2A}{T} e^{-sT/2} - \frac{4A}{T} + \frac{2A}{T} e^{sT/2}$$

Infine:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2} \left( \frac{2A}{T} e^{-sT/2} - \frac{4A}{T} + \frac{2A}{T} e^{sT/2} \right)$$

Soluzione 4: convoluzione

Dall'esercizio 17 si è visto che una funzione avente andamento triangolare può essere vista come il risultato della convoluzione tra due porte. Nel caso dell'esercizio citato le porte sono entrambe diverse da 0 nell'intervallo 0-1, e la loro convoluzione determina un risultato diverso da 0 tra 0 e 2.

Nel caso presente il triangolo è non nullo per  $T/2 < t < T/2$  e centrato nell'origine; dunque lo si può vedere come la convoluzione di due porte non nulle tra  $-T/4$  e  $T/4$ . Si supponga infatti di avere due porte  $x(t)$  e  $y(t)$  di tale genere, l'ampiezza delle quali sia tuttavia generica, per esempio in un caso N e nell'altro caso M. Sia  $y(t)$  la porta che "scorre" rispetto al parametro  $t$ , e che dunque viene ribaltata e traslata. I casi possibili di sovrapposizione sono simili a quelli ottenuti nell'esercizio 17, e sono riportati in figura 2.6.

Come per l'esercizio precedente nel caso A riportato in figura non c'è sovrapposizione, e questo si verifica per

$$t + \frac{T}{4} < -\frac{T}{4} \quad \rightarrow \quad t < -\frac{T}{2}$$

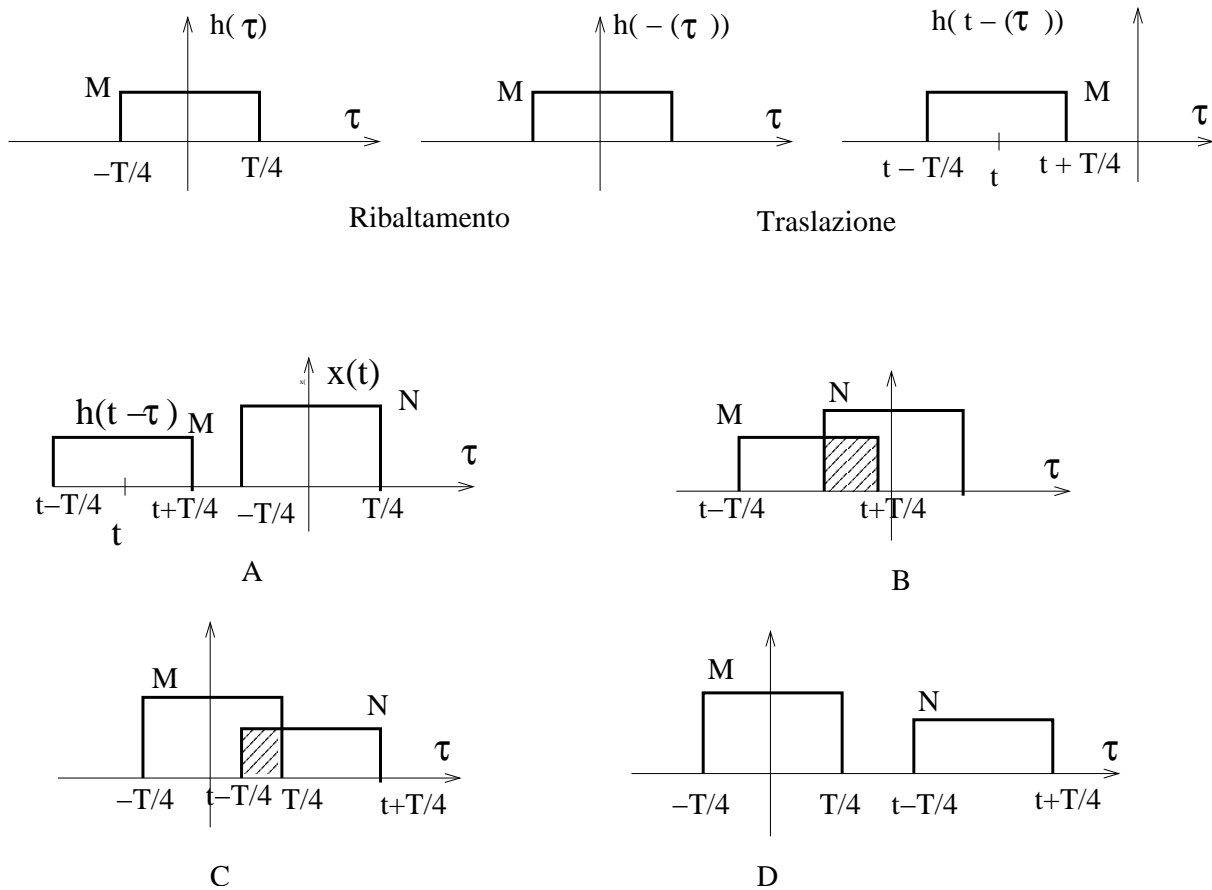


Figura 2.6:

mentre per

$$-\frac{T}{4} < t + \frac{T}{4} < \frac{T}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{T}{2} < t < 0$$

si ha sovrapposizione delle due porte e l'integrale da calcolare come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = \int_{-\frac{T}{4}}^{t+\frac{T}{4}} M \cdot N d\tau = \left[ MN\tau \right]_{-\frac{T}{4}}^{t+\frac{T}{4}} = MN \left( t + \frac{T}{2} \right)$$

Nel caso C la sovrapposizione si ha e ha lo stesso valore del caso B, ma ciò avviene nell'intervallo tra  $t - \frac{T}{4}$  e  $\frac{T}{4}$ , per valori del parametro

$$-\frac{T}{4} < t - \frac{T}{4} < \frac{T}{4} \quad 0 < t < \frac{T}{2}$$

Dunque l'integrale diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = \int_{t-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} M \cdot N d\tau = \left[ MN\tau \right]_{t-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = MN \left( t - \frac{T}{2} \right)$$

Nell'ultimo caso invece le due porte non hanno sovrapposizione e dunque l'integrale è nullo. Ciò avviene per valori di  $t$  tali per cui:

$$t - \frac{T}{4} > \frac{T}{4} \quad t > \frac{T}{2}$$

Complessivamente dunque il risultato della convoluzione è:

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{T}{2} \\ MN\left(t + \frac{T}{2}\right) & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ MN\left(t - \frac{T}{2}\right) & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & t > \frac{T}{2} \end{cases}$$

rappresentato in figura 2.7.

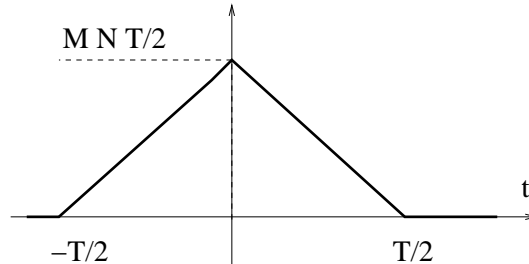


Figura 2.7:

Se ora si vuole trovare corrispondenza tra il caso appena visto e quello dell'esercizio dato si deve supporre che le due porte  $p_1$  e  $p_2$  abbiano ampiezza, per esempio,  $M=2A/T$  mentre  $N=1$ . Dunque si sa che

$$f(t) = p_1(t) * p_2(t)$$

ha come risultato la funzione triangolare data nel testo dell'esercizio.

È noto che la trasformata della convoluzione tra due funzioni è pari al prodotto tra le trasformate di ciascuna delle due funzioni (si veda la proprietà e la sua dimostrazione), ovvero al prodotto tra le trasformate di due porte. È noto inoltre che la trasformata di una porta di ampiezza  $D$  e di valore diverso da 0 per un intervallo pari a  $2 \cdot T/4$  è:

$$D \cdot 2 \cdot \frac{\sinh\left(\frac{T}{4}s\right)}{s}$$

Quindi complessivamente:

$$\begin{aligned} \text{Triangolo} &= p_1(t) * p_2(t) \\ \mathcal{L}[\text{Triangolo}](s) &= \mathcal{L}[p_1(t) * p_2(t)] \\ &= \mathcal{L}[p_1(t)](s) \cdot \mathcal{L}[p_2(t)](s) \\ &= \frac{2A}{T} \cdot \frac{2 \cdot \sinh\left(\frac{T}{4}s\right)}{s} \cdot 1 \frac{2 \cdot \sinh\left(\frac{T}{4}s\right)}{s} \\ &= \frac{A}{T/2} \left(2 \frac{\sinh\left(\frac{T}{4}s\right)}{s}\right)^2 \end{aligned}$$

Per i casi C e D dell'esercizio si possono applicare gli stessi metodi. Si lascia al lettore la soluzione suggerendo di utilizzare il metodo 3 sfruttando i risultati degli esercizi 3, 6 e 7 del capitolo 1. Nel caso dell'esercizio B, usando il metodo 3 e sfruttando i risultati dell'esercizio del capitolo 1 a pagina 9 si ha:

$$\begin{aligned} f(t) &= t \cdot u(t+T) - t \cdot u(t-T) \\ f'(t) &= 1 \cdot u(t+T) + -T \cdot \delta(t+T) - 1 \cdot u(t-T) - T \cdot \delta(t-T) \end{aligned}$$

da cui si può calcolare la trasformata:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[f'(t)] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{Ts}}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} + Te^{Ts} - Te^{-Ts} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{s} (e^{Ts} - Te^{-Ts}) + T(e^{Ts} - Te^{-Ts}) \right] \\ &= 2 \left( \frac{1 + sT}{s} \right) \sinh(Ts)\end{aligned}$$

### Esercizio 19

Sono date due funzioni:  $h(t)$  porta di durata  $T$  centrata in  $T/2$  e di ampiezza 1, e  $x(t)$  triangolo di valore 0 in 0 e di valore  $A$  in  $T$ . Se ne calcoli la convoluzione ricavandone il significato grafico.

#### Risoluzione

Come nel caso della convoluzione tra due porte, dal momento che il supporto del triangolo e della porta da convolvere sono uguali a di valore  $T$ , si può suddividere il calcolo in quattro intervalli:

$$A : t < 0 \quad B : 0 < t < T \quad C : T < t < 2T \quad t > 2T$$

e anche in questo caso negli intervalli A e D non c'è intersezione tra i due grafici. Nell'intervallo B l'integrale avrà come risultato:

$$B : \int_0^t 1 \cdot \frac{A}{T} \tau d\tau = \frac{A}{T} \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = \frac{A}{T} \frac{t^2}{2}$$

Mentre nell'intervallo C si ha:

$$C : \int_{t-T}^T 1 \cdot \frac{A}{T} \tau d\tau = \frac{A}{T} \frac{\tau^2}{2} \Big|_{t-T}^T = \frac{A}{T} \frac{1}{2} (T^2 - t^2 + 2tT - T^2) = \frac{A}{2} T - \frac{A}{T^2} (t - T)^2$$

Il risultato della convoluzione è:

$$h(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{2T} t^2 & 0 < t < T \\ \frac{A}{2} T - \frac{A}{2T} (t - T)^2 & T < t < 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

rappresentato in figura 2.8.

## 2.2 Trasformata di Fourier

### Richiami teorici

Si richiama brevemente di seguito la trasformata di Fourier e i suoi legami con la trasformata di Laplace. La trasformata di Laplace bilatera

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

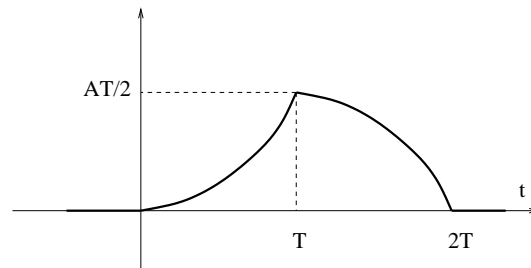


Figura 2.8:

è funzione della variabile *complessa*  $s$ . Se l'asse immaginario  $i\mathbf{R}$  è contenuto nel dominio  $\text{Dom}(\mathcal{L}f)$  (ciò che non è vero sempre, per esempio non è vero se  $f(t) = e^t$ ) posso porre  $s = i\omega$  e trovo la *trasformata di Fourier*

$$\hat{f}(\omega) \equiv (\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (2.2)$$

Discretizzando il tempo  $t$ , cioè ponendo  $t_k = k\Delta t$ , si osserva che  $(\mathcal{F}f)(\omega)$  è il limite di somme del tipo

$$\sum_k \exp(i\omega t_k) f(t_k) \Delta t$$

e quindi è una specie di prodotto scalare, o di “proiezione”, della funzione  $f(t)$  sulla funzione  $\exp(i\omega t)$ . Questo fa pensare che si possa “ricostruire” la funzione  $f(t)$  risommando le onde piane  $\exp(i\omega t)$ , ognuna moltiplicata per la componente di Fourier  $\hat{f}(\omega)$ .

#### Formula di inversione

Applicando la trasformata di Fourier due volte si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t') f(t') dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t-t')] d\omega \right) f(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' 2\pi\delta(t-t') f(t') \\ &= 2\pi f(t) \end{aligned}$$

poiché

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin Nt}{t} \\ &= 2\pi\delta(t) \end{aligned}$$

ricordando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = \pi$$

Di qui segue la *formula di inversione*:

$$(\mathcal{L}^{-1}\hat{f})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega$$