Politecnico di Torino
II Facoltà di Ingegneria - sede di Vercelli

Esercizi per il corso di Metodi Matematici e Statistici

Per gli allievi in Ingegneria Elettronica ed Informatica

Con soluzioni e risultati - a.a. 04-05

Mariagrazia Graziano

1 maggio 2005

Copyright

CAPITOLO 1

Descrizione di funzioni attraverso le distribuzioni e uso della delta di Dirac

Nell'ambito dell'elettronica, delle discipline telecomunicazionistiche e informatiche, l'estensione dell'insieme delle funzioni (in particolare funzioni il quadrato delle quali è integrabile su intervalli definiti) all'insieme delle *distribuzioni* rappresenta uno strumento estremamente potente. Nell'ambito di questo testo si prescinderà dalla trattazione alla base della teoria delle distribuzioni, per la quale si suggerisce di fare riferimento a testi di matematica adeguati, mentre ci si concentrerà sulle loro dirette applicazioni ad esercizi di base, richiamando ove necessario le proprietà più importanti.
Uno dei modi (ma non l'unico) per capire il significato delle distribuzioni consiste nel fatto che nell'estensione a tale insieme le funzioni sono tutte sempre derivabili *nel senso delle distribuzioni*; questo anche se le funzioni in esame, concepite al di fuori dell'insieme delle distribuzioni di tale insieme presentano punti di non derivabilità e/o di discontinuità.

Per esempio si consideri la funzione $f(t) = 4t$. Essa è una retta, passante per l'origine e avente coefficiente angolare 4; è continua e derivabile. La sua derivata è pari a $f'(t) = 4$.
Si consideri ora una piccola variazione di tale funzione:

$$f(t) = \begin{cases} 4t & t \geq 0 \\ 2t & t < 0 \end{cases}$$

Tale funzione è continua. Tuttavia non è derivable in senso classico in quanto presenta un punto angoloso, ovvero un punto per il quale la derivata destra e sinistra esistono finite, ma non coincidono. Siamo in grado di calcolare la derivata dei due tratti ma, in senso classico definiamo il punto $t = 0$ punto di non derivabilità. Nell'ambito delle distribuzioni non esiste più tale problema, ma la funzione è derivabile e la rappresentazione della funzione e della sua derivata è rappresentata in figura 1.1.

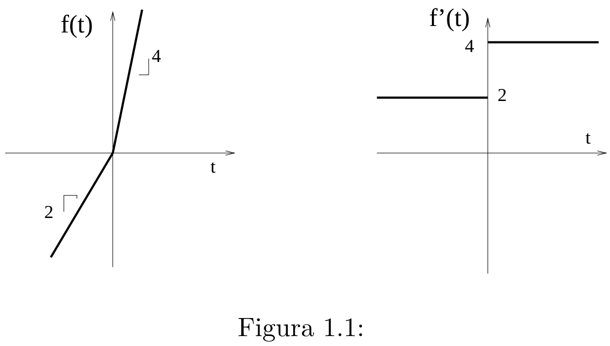

Figura 1.1:

Per calcolarla si utilizzano le regole di derivazione nel senso classico nei due tratti nei quali è derivabile, mentre nel punto $t = 0$ la derivata viene rappresentata dal "gradino" di ampiezza 2.

Si consideri a questo punto la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 4t + 1 & t \geq 0 \\ 2t & t < 0 \end{cases}$$

Essa è simile alla precedente tranne per il fatto che non è continua, ovvero presenta una discontinuità di prima specie (la funizone è definita in $t = 0$ ma il limite della funzione nel punto da destra e da sinistra non coincidono) e dunque non è derivabile in senso classico. Lo è nel senso delle distribuzioni. La sua derivata è rappresentata in figura 1.2 e si può intuitivamente spiegare in questo modo: seguendo l'ordinamento sull'asse delle ascisse, si osserva che per valori di t negativi la funzione cresce e tende a 0 con derivata costante pari a 2; nello zero presenta un "salto", ovvero una variazione brusca di valore pari a 1; per valori di t positivi la funzione torna a crescere in modo regolare con derivata costante pari a 4. La discontinuià viene intesa nel senso delle distribuzioni come un variazione brusca e viene rappresentata con una delta di Dirac. Graficamente la delta si rappresenta tramite una freccia che ha supporto esattamente nel punto corrispondente alla discontinuità ($t = 0$), il cui valore massimo è pari all'entità del salto (1) e il cui verso segue la direzione della varizione brusca (positivo).

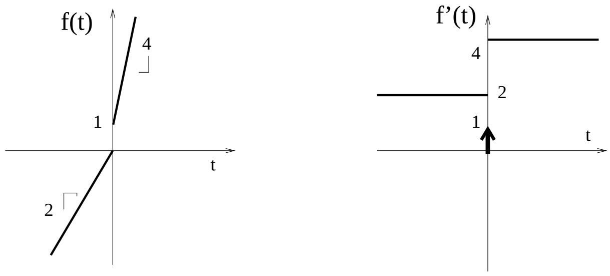

Figura 1.2:

Nel seguito si utilizzeranno i concetti qualitativi descritti in questa breve introduzione per la ricerca della derivata delle funzioni che man mano verranno indicate negli esercizi. Nell'ambito della soluzione di alcuni di essi verranno richiamati i concetti teorici o le proprietà che si renderanno man mano necessari.

Esercizio 1

Si scriva l'espressione della funzione porta p_T (indicatrice) attraverso l'uso della funzione gradino $u(t)$ (Heaviside) e se ne ricavi la derivata prima.

Risoluzione

Si ricorda che la funzione gradino è definita come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

oppure più sinteticamente

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Quest'ultima definizione viene adottata più spesso nelle applicazioni di tipo ingegneristico e sarà dunque utilizzata di seguito. È importante che le sue trasformazioni elementari più importanti (simmetria rispetto agli assi, traslazione) siano note al lettore, sia dal punto di vista grafico, sia per quanto riguarda la loro espressione algebrica. Si riporta in figura 1.3 il grafico del gradino e di alcune sue trasformazioni elementari. Volendo trovare la derivata di tutte le trasformazioni del gradino riportate

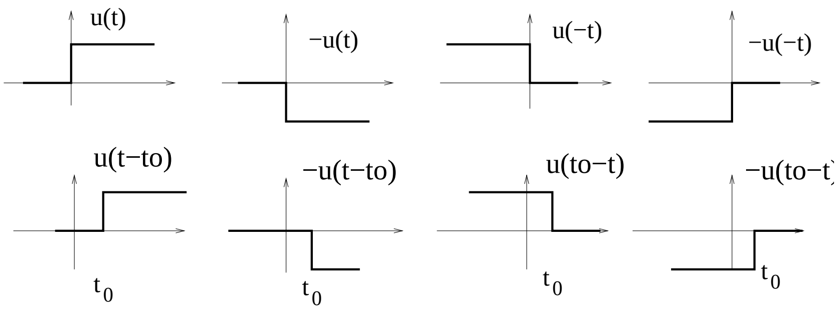

Figura 1.3:

in figura 1.3, si utilizza la delta di Dirac:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \delta(t) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t-t_0) = \delta(t-t_0)$$

La derivata è intesa *nel senso delle distribuzioni*, in quanto la funzione gradino è di per sè discontinua e dunque non derivabile nel senso delle funzioni. La delta, dunque, dà un'informazione relativa alla discontinuità della funzione. In figura 1.4 sono rappresentate le delta di Dirac corrispondenti alle funzioni gradino riportate in figura 1.3.

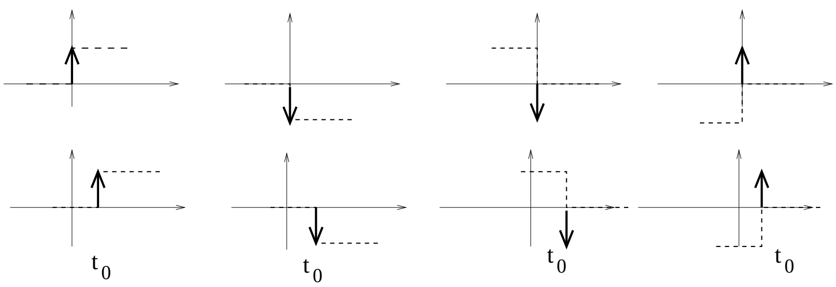

Figura 1.4:

Si faccia attenzione al verso della la delta che deve riportare il senso della variazione; quindi nel caso di $u(-t)$, per esempio, la delta ha verso negativo pur essendo il gradino sempre positivo o nullo, in quanto la funzione passa da valore 1 a valore 0, e dunque diminuisce bruscamente. Al contrario nel caso di $-u(-t)$ la delta è positiva, pur assumendo la funzione gradino valori negativi, in quanto essa passa da valore -1 a valore 0, facendo un salto positivo.

A questo punto gli strumenti essenziali per svolgere l'esercizio sono a disposizione e si può procedere nel definire l'espressione della funzione porta attraverso il gradino. La funzione *porta* è definita come:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{1.1}$$

ed è rappresentata in figura 1.5 (a fianco una sua generica traslazione). Si osservi che la porta è intesa centrata nello 0, e dunque il pedice nell'espressione $p_T(t)$ indica l'intervallo complessivo in corrispondenza del quale la funzione è diversa da 0.

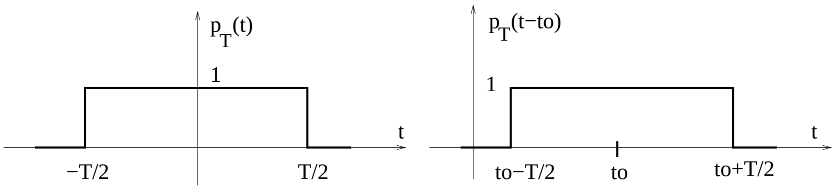

Figura 1.5:

Tale funzione si può costruire utilizzando la funzione gradino come indicato in figura 1.6 a sinistra: un gradino traslato su $-T/2$ ben descrive la variazione da 0 a 1 della porta, mentre per riportare a 0 nuovamente la funzione è necessario "togliere" il contributo del gradino. Lo si fa utilizzando un gradino di valore uguale ma opposto traslato in corrispondenza del punto in cui la funzione porta deve tornare a 0 ($t = T/2$). Si può scrivere quindi come

$$p_T(t) = u\big(t + \frac{T}{2}\big) - u\big(t - \frac{T}{2}\big) \tag{1.2}$$

Infatti, se, banalmente, si sommano intervallo per intervallo i valori assunti dai due gradini si ottengono esattamente i valori assunti dalla funzione porta.

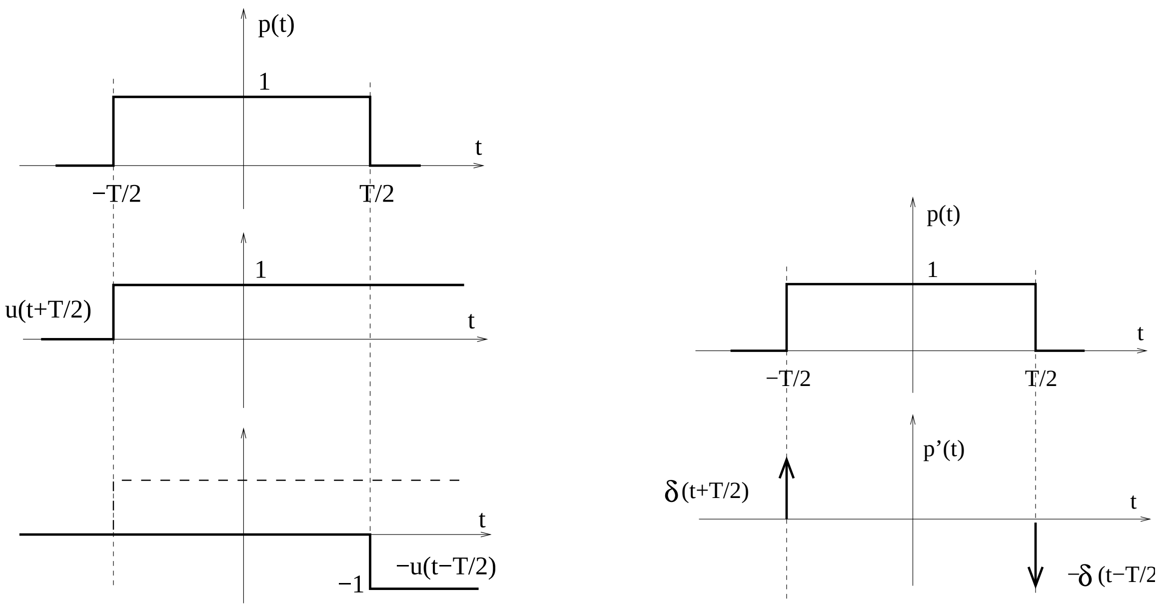

Figura 1.6:

Se a questo punto si vuole ottenere la derivata della porta si ragionerà come in precedenza si è fatto per il gradino, osservando che la porta presenta due "salti", uno positivo e uno negativo. La sua derivata prima sarà dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_T(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u\big(t + \frac{T}{2}\big) - u\big(t - \frac{T}{2}\big)\Big) = \delta\big(t + \frac{T}{2}\big) - \delta\big(t - \frac{T}{2}\big)$$

rappresentata in figura 1.6 a destra.

Generalizzando ad una porta traslata su $t = t_0$

$$p_T(t - t_0) = u\big(t + \frac{T}{2} - t_0\big) - u\big(t - \frac{T}{2} - t_0\big) \tag{1.3}$$

la derivata diventa come in equazione (1.4):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_T(t-t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(u\big(t+\frac{T}{2}-t_0\big) - u\big(t-\frac{T}{2}-t_0\big)\Big) = \delta\big(t+\frac{T}{2}-t_0\big) - \delta\big(t-\frac{T}{2}-t_0\big) \tag{1.4}$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $f(t) = \frac{1}{2}\,u(t)\,t^2$. Ricavare $f'(t)$, $f''(t)$ e $f'''(t)$, tracciandone man mano i grafici. Utilizzando quindi le regole di derivazione delle distribuzioni e le proprietà della delta di Dirac si ricavino algebricamente le stesse derivate. Che cosa succede se la funzione diventa $g(t) = \frac{1}{2}\,u(t-2)\,t^2$?

Risoluzione

Da un'analisi grafica si ottiene:

$$f(t) = \frac{1}{2}\,u(t)\,t^2 \qquad \text{figura 1.7.a}$$
$$f'(t) = tu(t) \qquad \text{figura 1.7.b}$$
$$f''(t) = u(t) \qquad \text{figura 1.7.c}$$
$$f'''(t) = \delta(t) \qquad \text{figura 1.7.d}$$

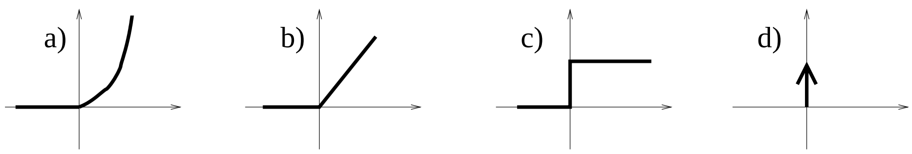

Figura 1.7:

Richiami teorici

Le proprietà di derivazione secondo le distribuzioni sono le stesse utilizzate per le funzioni, ovvero (indichiamo con $\mathcal{D}$ il segno di derivata secondo le distribuzioni):

$$\mathcal{D}\Big(\eta\cdot f(t) + \theta\cdot g(t)\Big) = \eta\cdot\mathcal{D}\Big(f(t)\Big) + \theta\cdot\mathcal{D}\Big(g(t)\Big) \tag{1.5}$$
$$\mathcal{D}\Big(f(t)\cdot g(t)\Big) = \mathcal{D}\Big(f(t)\Big)\cdot g(t) + f(t)\cdot\mathcal{D}\Big(g(t)\Big) \tag{1.6}$$

La principale proprietà della delta di Dirac[1] è

$$f(t)\cdot\delta(t) = f(0)\cdot\delta(t) \tag{1.7}$$
$$f(t)\cdot\delta(t-t_0) = f(t_0)\cdot\delta(t-t_0) \tag{1.8}$$

dove la (1.8) è una generalizzazione della (1.7). Il significato di questa importante proprietà si può spiegare utilizzando i grafici in figura 1.8. Data una funzione qualsiasi, il suo prodotto per una delta di Dirac ha come effetto quello di "rivelare" il valore della funzione nel punto che costituisce il supporto della delta. Nel caso di $\delta(t)$ tale punto è $t=0$, dunque il valore rivelato sarà $f(0)$, mentre nel caso di un delta traslata in un generico punto t_0, il valore rivelato sarà $f(t-t_0)$, ovvero il valore che la funzione $f(t)$ assume in tale punto.

[1] si rimanda a testi specifici per una dimostrazione

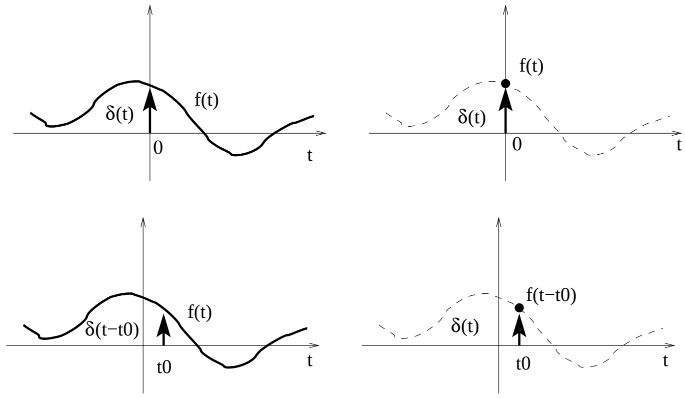

Figura 1.8:

Nota sulle applicazioni

Questa proprietà ha particolare ed importante utilizzo in campo telecomunicazionistico nel momento in cui si intende modellizzare il comportamento di un segnale analogico che venga ricevuto e che debba essere memorizzato per poi essere elaborato. Si fa accenno ad una importante applicazione qui di seguito allo scopo di legare questa trattazione agli aspetti ingegneristici ad essa connessi. Un'estensione molto semplice della proprietà appena vista è utilizzata nel teorema del campionamento di Shannon, che sta alla base della teoria delle comunicazioni. Lo stumento che si utilizza in questo caso è il "treno di impulsi" o "treno di delta" la cui espressione analitica è riportata di seguito:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \delta(t - m \cdot T_c)$$

e la cui rappresentazione grafica è in figura 1.9.a. Si tratta cioè di una sequenza di delta traslate una rispetto all'altra di un valore T_c. Effettuando un'operazione simile alla precedente, ovvero moltiplicando una funzione per tale treno di impulsi

$$f(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \delta(t - m \cdot T_c)$$

si ottengono i valori di $f(t)$ nei punti che costituiscono il supporto delle varie delta, ovvero si ottengono dei "campioni" della funzione in una sequenza progressiva e regolare di punti, la funzione risultante è la funzione di partenza $f(t)$ approssimata attraverso i suoi campioni e si indica come funzione campionata $f_c(t)$ indicata in figura 1.9. Ciascuno dei valori ampionati può essere memorizzato attraverso opportuni trattamenti[2]. Ovvimente più grande sarà T_c, più rari saranno i campioni e dunque più approssimativa la rappresentazione che si ha del segnale in arrivo.

Il teorema del campionamento di Shannon afferma che T_c deve essere inferiore ad un valore ben definito al fine di avere un "buona" rappresentazione del segnale (cioè che i valori campionati lo rappresentino univocamente). Tale valore è pari alla metà del periodo del segnale, se il segnale è periodico, o, più in generale, inferiore alla metà del valore di del periodo più piccolo (frequenza più elevata) che ha il segnale, se non è periodico.

[2]si rimanda a testi di teoria dei segnali ed elettronica delle telecomunicazioni per spiegazioni dettagliate su questo aspetto

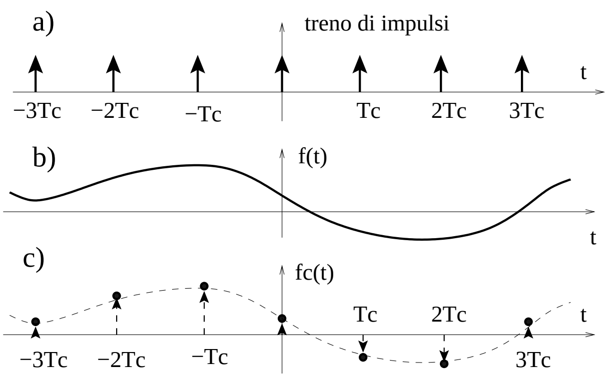

Figura 1.9:

Richiami teorici

Un'ulteriore proprietá della delta riguarda il prodotto di una funzione per la derivata della delta:

$$f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t) + f'(0) \cdot \delta(t) \tag{1.9}$$

La dimostrazione è semplice e la si riporta a scopo di esercizio sulle proprietà (1.6) e (1.7).

È noto dalla (1.6) che	$\mathcal{D}\Big(f(t) \cdot \delta(t)\Big)$	$=\mathcal{D}\Big(f(t)\Big) \cdot \delta(t) + f(t) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big)$
inoltre per la (1.7)	$f(t) \cdot \delta(t)$	$=f(0) \cdot \delta(t)$
che si può sostituire	$\mathcal{D}\Big(f(t) \cdot \delta(t)\Big)$	$=\mathcal{D}\Big(f(0) \cdot \delta(t)\Big)$
ma essendo$f(0)$costante	$\mathcal{D}\Big(f(0) \cdot \delta(t)\Big)$	$=f(0) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big)$
quindi sostituendo nella prima equazione	$f(0) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big)$	$=\mathcal{D}\Big(f(t)\Big) \cdot \delta(t) + f(t) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big)$
da cui si può ricavare l'ultimo termine	$f(t) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big)$	$=f(0) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big) - \mathcal{D}\Big(f(t)\Big) \cdot \delta(t)$
che per la (1.7) diventa	$f(t) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big)$	$=f(0) \cdot \mathcal{D}\Big(\delta(t)\Big) - \mathcal{D}\Big(f(0)\Big) \cdot \delta(t)$

A questo punto si può proseguire l'esercizio utilizzando le proprietà richiamate in precedenza. Lo scopo è calcolare la derivata della funzione di partenza e verificare la coerenza con i grafici.

Dalla funzione

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot u(t)$$

si avrà per la derivata prima:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\big[2t \cdot u(t) + t^2 \cdot u'(t)\big] = t \cdot u(t) + \frac{1}{2}t^2 \cdot \delta(t) = t \cdot u(t) + 0$$

Per la derivata seconda invece:

$$f''(t) = 1 \cdot u(t) + t \cdot \delta(t) = u(t)$$

E per la derivata terza:

$$f'''(t) = \delta(t)$$

L'esercizio chiede ancora che cosa succederebbe se la funzione fosse:

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot u(t-2)$$

ovvero la stessa parabola presa in considerazione in precedenza, ma "validata" dal gradino solo a partire da $t = 2$. Poiché la parabola continua ad avere vertice nell'origine, la funzione risultate è discontinua, a differenza del caso iniziale dell'esercizio. Quindi, derivando nel senso delle distribuzioni è lecito aspettarsi un delta di Dirac. Infatti si ottiene:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\big[2t \cdot u(t-2) + t^2 \cdot u'(t-2)\big] = t \cdot u(t-2) + \frac{1}{2}t^2 \cdot \delta(t-2) = t \cdot u(t-2) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \delta(t-2) = t \cdot u(t-2) + 2 \cdot \delta(t-2)$$

Per la derivata seconda invece:

$$f''(t) = 1 \cdot u(t-2) + t \cdot \delta(t-2) + 2 \cdot \delta'(t-2) = u(t-2) + 2 \cdot \delta(t-2) + 2 \cdot \delta'(t-2)$$

E per la derivata terza:

$$f'''(t) = \delta(t-2) + 2 \cdot \delta'(t-2) + 2 \cdot \delta''(t-2)$$

Il risultato grafico è in figura 1.10, dove le derivate successive della delta vengono rappresentate con frecce che riportano un numero di "oscillazioni" pari all'ordine della derivata. Intuitivamente si può far corrispondere a questi segni la "memoria" delle discontinuità della funzione durante la derivazione.

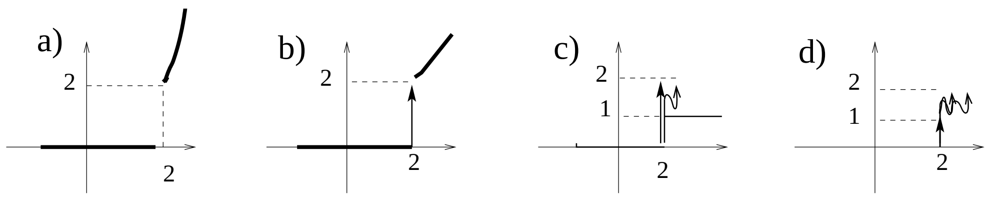

Figura 1.10:

Esercizio 3

Sia data la funzione in figura 1.11. La si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavi la derivata prima.

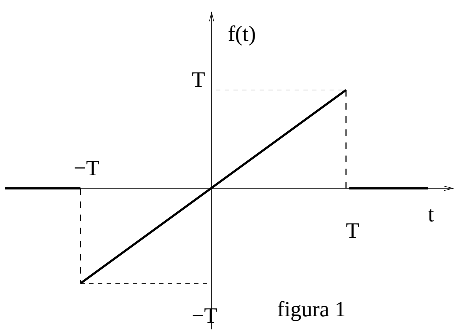

Figura 1.11:

Risoluzione

Si può descrivere la funzione data utilizzando la funzione indicatrice (porta) osservando, come riportato in figura 1.12, che la funzione è pari a $g(t) = t$ solo nell'intervallo indicato dalla porta

$$p_{2T}(t) = u(t+T) - u(t-T)$$

cioé dove la porta è diversa da zero. Dunque la funzione data sarà:

$$f(t) = g(t) \cdot p_{2T}(t) = t\big(u(t+T) - u(t-T)\big) = t \cdot u(t+T) - t \cdot u(t-T)$$

che a sua volta si può vedere come la somma di due parti: la prima è la retta passante per l'origine valida a partire da $t = -T$; ad essa viene sommata la seconda parte, ovvero una quantità uguale e oppostavalida solo a partire da $t = T$. Se ne vuole ora calcolare la derivata prima; utilizzando le regole

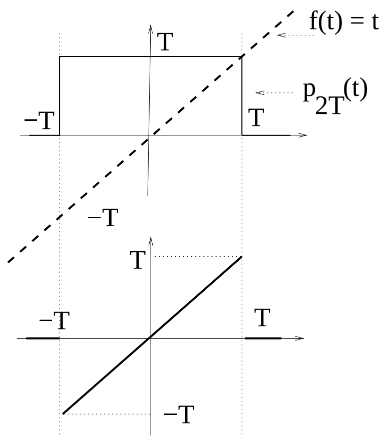

Figura 1.12:

di derivazione note, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(t \cdot u(t+T)\Bigg) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg(t \cdot u(t-T)\Bigg) \\
&= 1 \cdot u(t+T) + t \cdot \delta(t+T) - 1 \cdot u(t-T) - t \cdot \delta(t-T) \\
&\text{poiché} \quad h(t) \cdot \delta(t-t_0) = h(t_0) \cdot \delta(t-t_0) \quad \text{si ha} \\
&= 1 \cdot u(t+T) + (-T) \cdot \delta(t+T) - 1 \cdot u(t-T) - (+T) \cdot \delta(t-T) \\
&= p_{2T}(t) - T\delta(t+T) - T\delta(t-T)
\end{aligned}$$

che è rappresentata in figura 1.13.

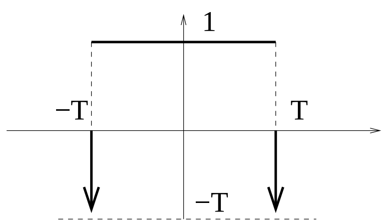

Figura 1.13:

Il calcolo corrisponde a quanto si sarebbe potuto ricavare graficamente considerando la discontinuità della funzione in $t = -T$ di valore negativo e pari a T, la derivata della retta di pendenza 1, pari alla retta costante di valore 1, e la discontinuità in $t = T$ sempre di valore negativo e pari a T.

Esercizio 4

Sia data la funzione in figura 1.14. La si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavino le derivate prima e seconda.

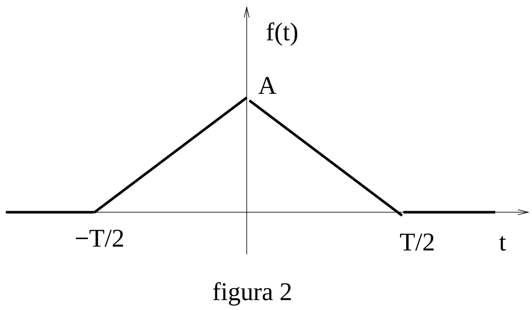

Figura 1.14:

Risoluzione

Si può rappresentare il grafico dato come la sovrapposizione di due parti, rappresentate in figura 1.15, ciascuna delle quali data da un retta non passante per l'origine e identificata da una porta traslata:

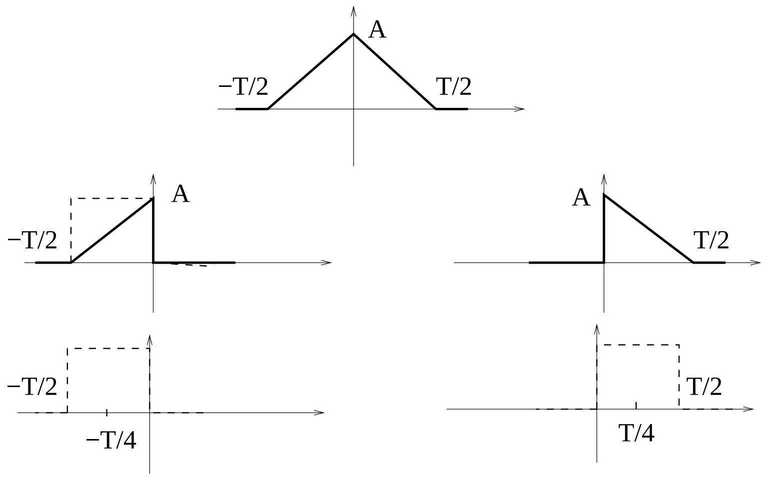

Figura 1.15:

Le due rette hanno entrambe coefficiente angolare

$$\frac{A-0}{\dfrac{T}{2}-0}=\frac{2A}{T}$$

in un caso positivo e nell'altro negativo; entrambe sono inoltre traslate in alto di un valore pari ad A. Quindi le due rette hanno quindi espressione $f_1(t) = (\frac{2A}{T}t + A)$ e $f_2(t) = (A - \frac{2A}{T}t)$. Le due porte valgono 1 per un intervallo complessivo pari a $T/2$. Sono centrate l'una su $t = -T/4$ e ha espressione $p_{\frac{T}{2}}(t + \frac{T}{4})$, l'altra su $t = T/4$ ovvero è la porta $p_{\frac{T}{2}}(t - \frac{T}{4})$. La funzione complessiva si può scrivere dunque come:

$$f(t) = \Big(\frac{2A}{T}t + A\Big)\Big[p_{\frac{T}{2}}(t + \frac{T}{4})\Big] + \Big(A - \frac{2A}{T}t\Big)\Big[p_{\frac{T}{2}}(t - \frac{T}{4})\Big]$$

che, utilizzando la scrittura tramite gradino della porta, diventa

$$= \Big(\frac{2A}{T}t + A\Big)\Big[u\big(t + \frac{T}{2}\big) - u(t)\Big] + \Big(A - \frac{2A}{T}t\Big)\Big[u(t) - u\big(t - \frac{T}{2}\big)\Big]$$

che, moltiplicando termine a termine e semplificando, diventa

$$= \Big(\frac{2A}{T}t + A\Big) \cdot u\big(t + \frac{T}{2}\big) - \Big(A - \frac{2A}{T}t\Big) \cdot u\big(t - \frac{T}{2}\big) - \frac{4A}{T} \cdot t \cdot u(t)$$

Applicando ora a quest'ultima le regole di derivazione e le proprietà della delta come nell'esercizio precedente si ottiene (si lasciano i calcoli al lettore per esercizio):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \frac{2A}{T} \cdot u\big(t + \frac{T}{2}\big) + \frac{2A}{T} \cdot u\big(t - \frac{T}{2}\big) - \frac{4A}{T} \cdot u(t)$$

dove non sono presenti delta di Dirac, in quanto la funzione di partenza è continua.
Per la derivata seconda invece si ottiene:

$$f''(t) = \frac{2A}{T}\delta\big(t + \frac{T}{2}\big) + \frac{2A}{T}\delta\big(t - \frac{T}{2}\big) - \frac{4A}{T} \cdot \delta(t)$$

I risultati sono rappresentati graficamente in figura 1.16.

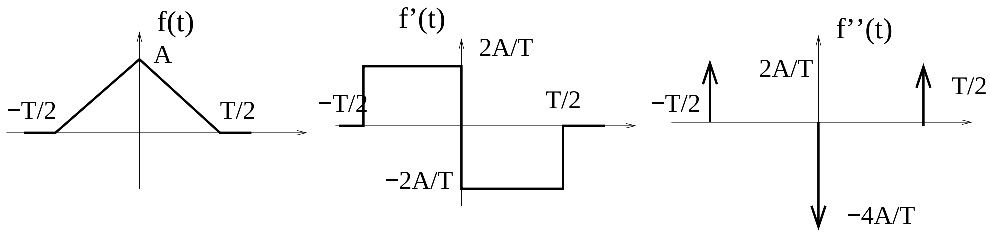

Figura 1.16:

Esercizio 5

Sia data la funzione $f(t) = (t-3)^2 u(t-3)$; si ricavino graficamente le derivate successive fino al terzo ordine.

Risultati

Come per l'esercizio 2 a meno di una costante (1/2) e di una traslazione in $t = 3$. Attenzione, la funzione è continua, in quanto la parabola è traslata in $t = 3$ come la funzione gradino.

Esercizio 6

Sia data la funzione in figura 1.17. La si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavino le derivate prima e seconda.

Risoluzione

La funzione rappresentata si può scrivere in due modi. Il primo corrisponde al metodo precedente, ovvero si può vedere la funzione composta da tre tratti pari ad una retta $f_1(t) = t$, $f_2(t) = 1$ e $f_3(t) = -(t-3)$, ciascuno "indicato" da una adeguata porta, sempre di supporto $T = 1$ e traslata nei

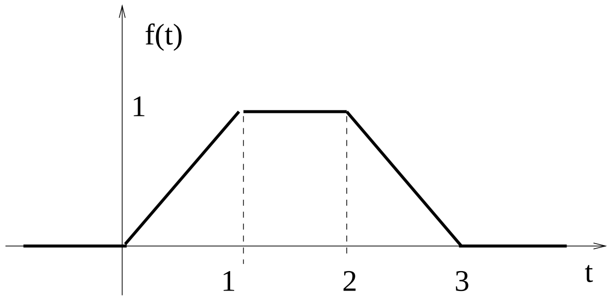

Figura 1.17:

tre casi in $t = 1/2$, $t = 3/2$ e $t = 5/2$; scrivendo come prima la funzione come somma dei prodotti di ciascuna porta per la corrispondente funzione:

$$\begin{aligned} f(t) &= t \cdot p_{\frac{1}{2}}\big(t - \frac{1}{2}\big) + 1 \cdot p_{\frac{1}{2}}\big(t - \frac{3}{2}\big) - (t-3) \cdot p_{\frac{1}{2}}\big(t - \frac{5}{2}\big) \\ &= t\big(u(t) - u(t-1)\big) + u(t-1) - u(t-2) - (t-3)\big(u(t-2) - u(t-3)\big) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Il secondo metodo è più diretto e simile a quello utilizzato per costruire la porta come somma di gradini nell'esercizio 1; si osserva che il primo tratto è una retta $y = t$ indicato da un gradino a partire da $t = 0$, e dunque si scrive $tu(t)$. Il secondo tratto della $f(t)$ è costante: dato che la retta precedente continua ad avere contributo se la si comprende nella somma, allora sommando a tale retta una retta di pendenza uguale e contraria si otterrà una retta costante; la retta da sommare tuttavia deve essere traslata in $t = 1$, ovvero $y = -(t-1) = -t + 1$, e indicata da un gradino traslato in uno (quindi $-(t-1)u(t-1)$), . A questo punto, a partire da $t = 2$ si può sommare una retta di pendenza -1 traslata in $t = 2$ ovvero $-(t-2)u(t-2)$, che verrà "compensata" da una retta di pendenza opposta $+1$ e traslata in $t = 3$, ovvero $y = (t-3)$ a partire da $t = 3$ grazie ad un gradino traslato, e quindi si somma ancora $(t-3)u(t-3)$. Il risultato è in equazione (1.11). Svolgendo i calcoli dell'equazione (1.10) si ottiene la (1.11).

$$f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3) \tag{1.11}$$

I due metodi possono essere usati equivalentemente. Dall'equazione (1.11) si ricavano facilmente le derivate prima e seconda (si lasciano i caolci al lettore):

$$\begin{aligned} f'(t) &= u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) \\ f''(t) &= \delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2) + \delta(t-3) \end{aligned}$$

che sono apprresentate in figura 1.17.

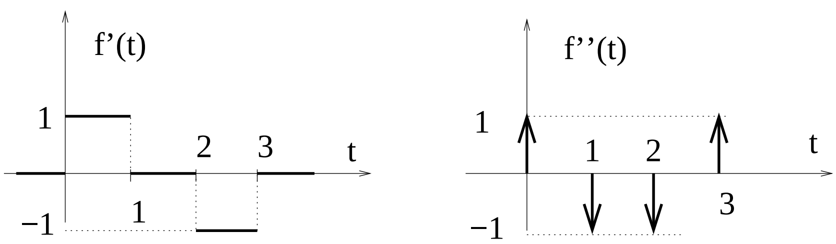

Figura 1.18:

Esercizio 7

Sia data la funzione in figura 1.19. la si descriva attraverso la funzione gradino e se ne ricavi attraverso calcoli e graficamente la derivata prima distribuzionale.

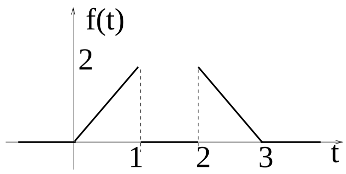

Figura 1.19:

Risultati

Si lasciano i calcoli al lettore.

$$f(t) = 2t\big[u(t) - u(t-1)\big] + (6-2t)\big[u(t-2) - u(t-3)\big]$$

Il risultato della derivazione è in figura 1.20.

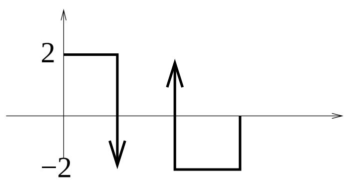

Figura 1.20:

Esercizio 8

Sia data la funzione

$$f(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0$$

Disegnarne il grafico; ricavare algebricamente e graficamente la derivata prima distribuzionale.

Risultati

Si riporta in figura 1.21 il grafico della funzione e della sua derivata. La derivata vale dunque:

$$f'(t) = -ae^{at}u(t) + \delta(t)$$

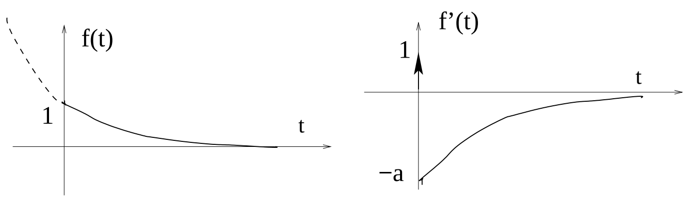

Figura 1.21:

Esercizio 9

Sia $g(t)$ una funzione coseno di periodo T e ampiezza 1. Si costruisca $f(t)$ limitando la $g(t)$ tramite la porta $p_{\frac{3}{2}T}(t)$ e la si disegni. Si ricavino algebricamente e graficamente le derivate distribuzionali prima e seconda.

Risoluzione

L'espressione di tale funzione coseno è

$$g(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

La funzione limitata dalla porta sarà quindi

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \left[u\big(t + \frac{3}{4}T\big) - u\big(t - \frac{3}{4}\big)\right]$$

Il grafico della funzione risultante è in figura 1.22.

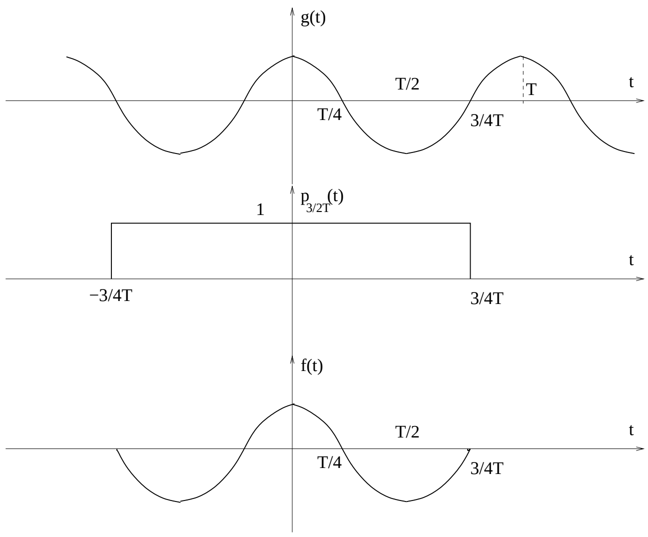

Figura 1.22:

Si noti che la funzione è continua, quindi nella derivazione non ci aspettiamo la presenza di delta di Dirac. Derivando si ottiene infatti:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \delta\big(t + \frac{3}{4}T\big) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \delta\big(t - \frac{3}{4}\big) \\
&= \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \big(-\frac{3}{4}T\big)\right) \delta\big(t + \frac{3}{4}T\big) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \big(\frac{3}{4}T\big)\right) \delta\big(t - \frac{3}{4}\big) \\
&= \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) + 0 + 0
\end{aligned}$$

Il grafico della derivata prima è in figura 1.23. Dal calcolo della derivata seconda questa volta ci si aspettano due delta in quanto la nuova funzione è discontinua.

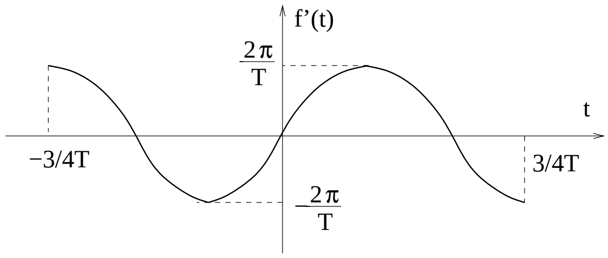

Figura 1.23:

Dal calcolo della derivata seconda si ricava infatti:

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) + \frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\delta\big(t+\frac{3}{4}T\big) - \frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\delta\big(t-\frac{3}{4}\big)\\
&= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) + \frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\big(-\frac{3}{4}T\big)\right)\delta\big(t+\frac{3}{4}T\big) - \frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\big(\frac{3}{4}T\big)\right)\delta\big(t-\frac{3}{4}\big)\\
&= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) p_{\frac{3}{2}T}(t) + \frac{2\pi}{T}\delta\big(t+\frac{3}{4}T\big) + \frac{2\pi}{T}\delta\big(t-\frac{3}{4}\big)
\end{aligned}
$$

L'andamento della derivata seconda è in figura 1.24 (nel caso di $T > 2\pi$).

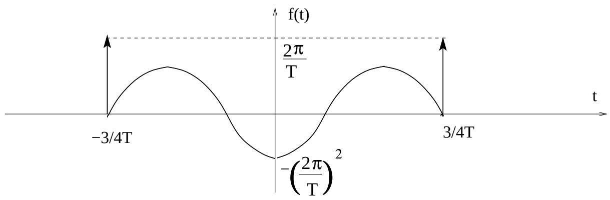

Figura 1.24:

Esercizio 10

Calcolare le derivate distribuzionali prima e seconda di

$$f(t) = \big(u(t) - u(t-1)\big)(1-t^3) + \big(u(t+1) - u(t)\big)(1+t^3)$$

e si confronti il risultato con il metodo grafico.

Esercizio 11

Si derivino due volte secondo le distribuzioni le seguenti funzioni:

$$a) f(t) = (2t + t^3 + 2t^6)u(t) \qquad b) g(t) = sin(t)u(t)$$

Risultati

$$f\prime(t) = u(t)(2 + 3t^2 + 12t^5) \qquad f\prime\prime(t) = 2\delta(t) + u(t)(6t + 60t^2)$$

$$g'(t) = -cos(t)u(t) \qquad g''(t) = \delta(t) - sin(t)u(t)$$

Esercizio 12

Si ricavi la derivata distribuzionale al quarto ordine della funzione all'esercizio 5.

Risultati

$$f''''(t) = \delta'(t-3)$$

Esercizio 13

Si ricavi la derivata distribuzionale al secondo ordine della funzione all'esercizio 7.

Risultati

$$f''(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-1) - 2\delta'(t-1) + 2\delta'(t-2) + 2\delta(t-3) - 2\delta'(t-2)$$

Esercizio 14

Si ricavi per via grafica e per via analitica la derivata distribuzionale al primo e secondo ordine della funzione

$$f(t) = sin(3t+2)\big(u(t) - u(t-1)\big)$$

Risultati

Si lascia la soluzione grafica al lettore. Il risultato analitico è:

$$f'(t) = 3cos(3t+2)[u(t) - u(t-1)] + sin(2)\delta(t) - sin(5)\delta(t-1)$$

$$f''(t) = -9sin(3t+2))[u(t) - u(t-1)] + 3cos(3t+2)[\delta(t) - \delta(t-1)] + sin(2)\delta'(t) - sin(5)\delta'(t-1)$$