

Lucidi di Analisi dei sistemi

Lezione 13 - La trasformata di Laplace

Alessandro Giua

Dip. di Ingegneria Elettrica ed Elettronica
Università di Cagliari, Italy

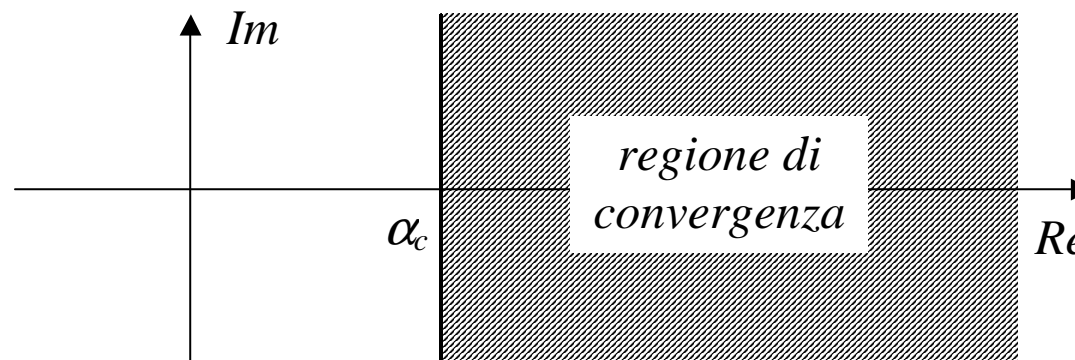


Definizione di trasformata

Definizione 1 La **trasformata di Laplace** della funzione $f(t)$ della variabile reale t è la funzione della variabile complessa s

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

In generale l'integrale può essere calcolato solo per valori di $s = \alpha + j\omega$ appartenenti ad un semipiano aperto per cui vale $Re(s) = \alpha > \alpha_c$. Tale semipiano è detto **regione di convergenza** e il valore α_c è detto **ascissa di convergenza**.



Esempio (Trasformata del gradino unitario):

Dato

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

vale

$$\Delta_{-1}(s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=\infty} + \frac{1}{s}.$$

Se $s = \alpha + j\omega$ con $Re(s) = \alpha > \alpha_c = 0$ (regione di convergenza) vale

$$\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=\infty} = \frac{e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}}{-s} \Big|_{t=\infty} = \frac{e^{-\alpha t}}{-s} \Big|_{t=\infty} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-s} \Big|_{t=\infty} = 0 \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-s} \Big|_{t=\infty} = 0$$

e dunque otteniamo il risultato

$$\Delta_{-1}(s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}.$$

Definizione di antitrasformata

Definizione 2 Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, il valore della funzione $f(t)$ per ogni $t \geq 0$ può essere determinato mediante la **antitrasformata di Laplace**:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds,$$

dove α_0 è un qualunque valore reale che soddisfa $\alpha_0 > \alpha_c$.

In pratica questa formula non viene mai usata per antitrasformare: **essa ha un interesse puramente teorico** perchè evidenzia una relazione biunivoca fra una funzione $f(t)$ (considerata solo per $t \geq 0$) e la sua trasformata $F(s)$.

Nota 1 I valori della funzione $f(t)$ per valori di $t < 0$ non vengono presi in conto nel calcolo della trasformata e non vengono determinati dall'antitrasformata.

\implies Due funzioni **diverse fra loro per $t \in (-\infty, 0)$** e **coincidenti per $t \in [0, +\infty)$** hanno la stessa trasformata di Laplace.

\implies Non vi è biunivocità tra funzione $f(t)$ (per $t \in \mathbb{R}$) e la funzione $F(s)$.

Per ovviare a questo problema: si suppone che la trasformata descriva una funzione $f(t)$ che assume valori nulli per $t < 0$ e dunque l'operatore di antitrasformazione determina una funzione $f(t)$ che assume valori nulli per $t < 0$.

Esempio: La funzione costante $c(t) = 1$ per $t \in \mathbb{R}$ coincide con $\delta_{-1}(t)$ per $t \geq 0$.

$$C(s) = \Delta_{-1}(s) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = \delta_{-1}(t) \neq c(t).$$

Nota 2 La funzione $F(s)$ trasformata di $f(t)$ può essere calcolata solo se s appartiene alla regione di convergenza. Si considera però l'*estensione analitica* della $F(s)$ su tutto il piano complesso (o quasi) e cioè anche per valori di s non appartenenti alla regione di convergenza.

Esempio: La trasformata del gradino $\Delta_{-1}(s) = \frac{1}{s}$ ha come regione di convergenza il semipiano reale positivo. Tuttavia la funzione $\Delta_{-1}(s) = \frac{1}{s}$ si considerata come una funzione definita su tutto il piano complesso (tranne ovviamente che nell'origine $s = 0$).

Nota 3 se una funzione contiene termini impulsivi nell'origine, la definizione di trasformata di Laplace dovrebbe essere modificata come segue:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Esempio (Trasformata dell'impulso): La trasformata della funzione di Dirac $\delta(t)$ vale

$$\Delta(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1.$$

Trasformata della rampa esponenziale

Data una **rampa esponenziale** definita (per $k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{C}$) come

$$\frac{t^k}{k!} e^{at} \delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{t^k}{k!} e^{at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

la sua trasformata di Laplace vale $\mathcal{L} \left[\frac{t^k}{k!} e^{at} \delta_{-1}(t) \right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}}$.

Casi particolari:

- gradino unitario: $\mathcal{L} [\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$
 - rampa: $\mathcal{L} \left[\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t) \right] = \frac{1}{s^{k+1}}$
 - esponenziale: $\mathcal{L} [e^{at} \delta_{-1}(t)] = \frac{1}{(s-a)}$
-

Principio di linearità

Se $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ la sua trasformata di Laplace vale:

$$F(s) = \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Esempio (Trasformata delle funzioni sinusoidali):

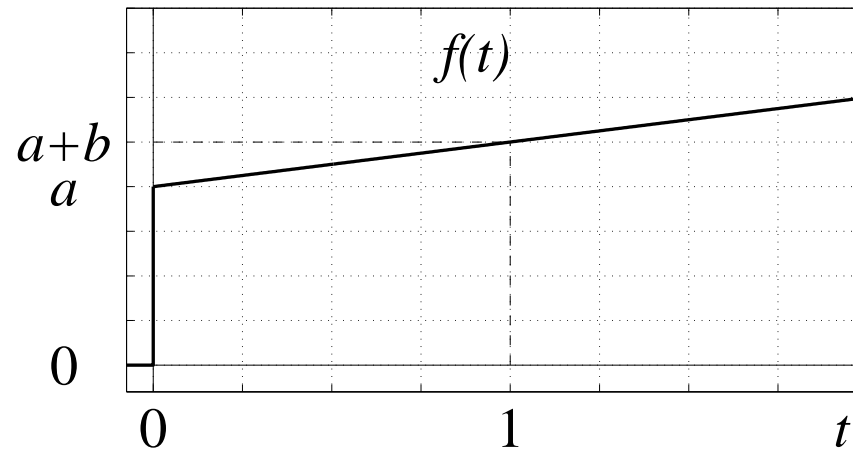
- **coseno**: $\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

- **seno**: $\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Esempio: Si consideri la funzione in figura.



Tale funzione può essere vista come la somma di un gradino di ampiezza a e di una rampa lineare di pendenza b , ovvero può porsi

$$f(t) = (a + bt)\delta_{-1}(t) = a\delta_{-1}(t) + bt\delta_{-1}(t).$$

La trasformata di tale funzione vale dunque

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2}.$$

Teorema della derivata

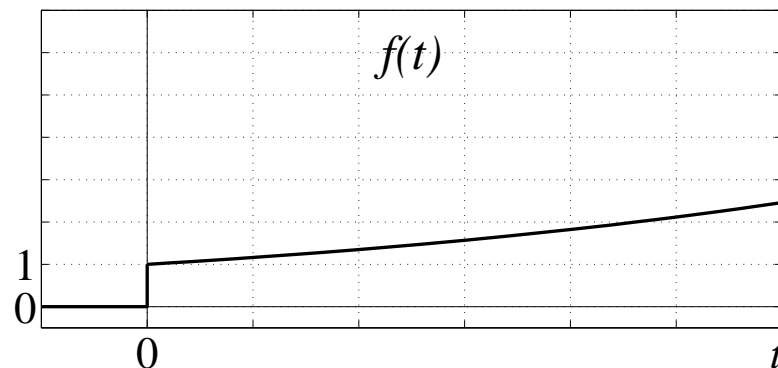
Data la funzione $f(t)$ con trasformata di Laplace $F(s)$, vale:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0).$$

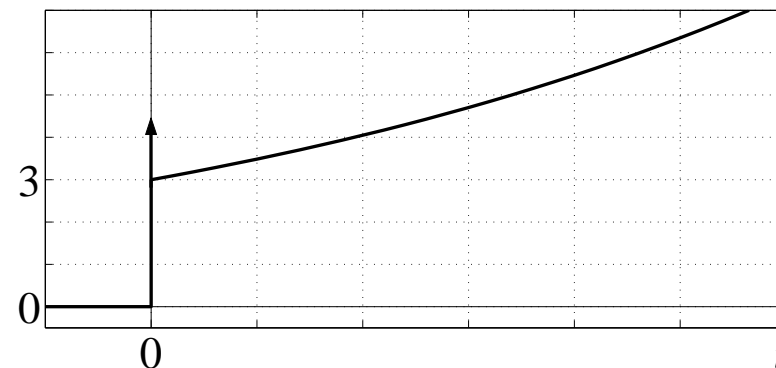
Se $f(t)$ è discontinua nell'origine si deve intendere $f(0)$ come $f(0^-)$.

Derivare rispetto a t nel dominio del tempo corrisponde a **moltiplicare per s** nel dominio della variabile di Laplace.

$$\text{Esempio: } f(t) = e^{3t} \delta_{-1}(t) \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s-3}.$$



(a)



(b)

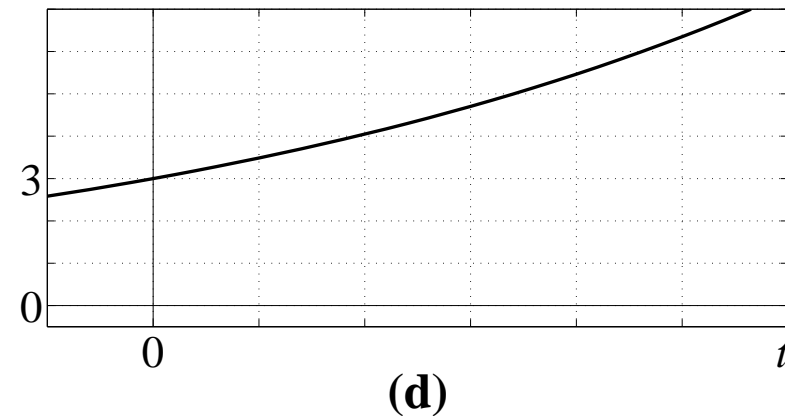
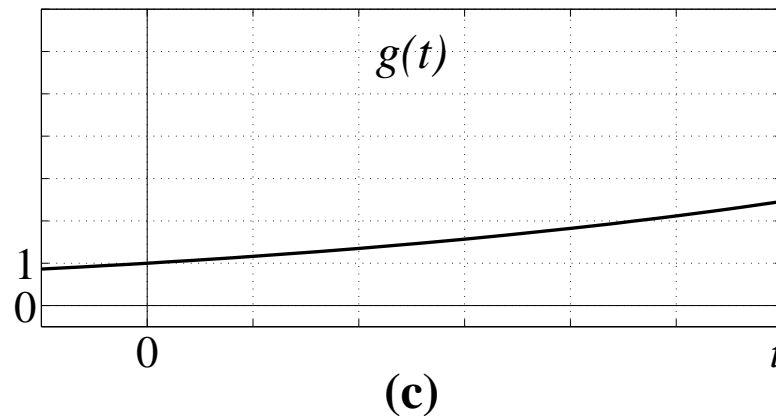
$f(t)$ è discontinua nell'origine [fig. (a)] poiché $f(0^-) = 0 \neq f(0^+) = 1$. Dunque

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0^-) = sF(s) - 0 = \frac{s}{s-3}.$$

Ciò può verificarsi immediatamente. La derivata della $f(t)$ vale infatti [fig. (b)]

$$\frac{d}{dt} f(t) = \delta(t) + 3e^{3t} \delta_{-1}(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = 1 + 3F(s) = 1 + \frac{3}{s-3} = \frac{s}{s-3}.$$

$$\text{Esempio: } g(t) = e^{3t} \implies G(s) = \frac{1}{s-3}.$$



$g(t)$ è continua nell'origine [fig. (c)] poiché $g(0^-) = g(0^+) = 1$. Dunque

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} g(t) \right] = sG(s) - g(0) = sG(s) - 1 = \frac{s}{s-3} - 1 = \frac{3}{s-3}.$$

Ciò può verificarsi immediatamente. La derivata della $g(t)$ vale infatti [fig. (d)]

$$\frac{d}{dt} g(t) = 3e^{3t} \implies \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} g(t) \right] = \mathcal{L} [3e^{3t}] = \frac{3}{s-3}.$$

NB: $g(t)$ e $f(t)$ hanno stessa trasformata; le loro derivate hanno trasformate diverse.

Derivate di ordine maggiore di uno

Data la funzione $f(t)$ con trasformata di Laplace $F(s)$, sia $f^{(i)}(t)$ la sua derivata i -ma rispetto al tempo per $i = 0, \dots, n$. Vale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[f^{(n)}(t) \right] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) + \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)\end{aligned}$$

Nel caso in cui la funzione $f^{(i)}(t)$ sia discontinua nell'origine si deve intendere $f^{(i)}(0)$ come $f^{(i)}(0^-)$, per $i = 0, \dots, n - 1$.

Teorema dell'integrale

Data la funzione $f(t)$ con trasformata di Laplace $F(s)$, vale:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Se $f(t)$ contiene impulsi nell'origine si deve intendere

$$\mathcal{L} \left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Integrare rispetto a t nel dominio del tempo corrisponde a **dividere per s** nel dominio della variabile di Laplace.

Esempio: Si consideri la funzione

$$f(t) = t\delta_{-1}(t) \quad \text{che ha trasformata di Laplace} \quad F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Vale dunque

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s^3}.$$

Ciò può verificarsi immediatamente. L'integrale della $f(t)$ vale infatti per $t \geq 0$:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t t d\tau = \frac{t^2}{2}$$

e trasformando si ottiene come previsto

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \mathcal{L} \left[\frac{t^2}{2} \right] = \frac{1}{s^3}.$$

Teorema del valore finale

Sia $f(t)$ una funzione con trasformata di Laplace $F(s)$. **Se esiste finito il** $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

Esempio: Si consideri la funzione $f(t) = (2 - e^{-3t})\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata vale

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{s+6}{s(s+3)}.$$

Si verifica facilmente che vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2 - e^{-3t})\delta_{-1}(t) = 2,$$

e tale valore coincide con

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+6}{s+3} = 2.$$

Tale teorema è utile per conoscere il valore finale di una funzione $f(t)$ di cui è nota la trasformata $F(s)$ senza dover antitrasformare.

Tuttavia per poter applicare il teorema occorre essere sicuri che il valore finale esista finito altrimenti si ottengono risultati non corretti.

Esempio: Si consideri la funzione $f(t) = (1 + e^t)\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata vale

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} = \frac{2s-1}{s(s-1)}.$$

Vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$$

mentre

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s-1}{s-1} = 1.$$

Teorema del valore iniziale

Sia $f(t)$ una funzione con trasformata di Laplace $F(s)$. **Se esiste finito il** $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ allora

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Esempio: Si consideri la funzione $f(t) = \cos(2t)\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata vale

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Applicando la regola di de l'Hôpital si verifica che vale

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + 4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s}{2s} = 1,$$

e anche $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \cos(0) = 1$.

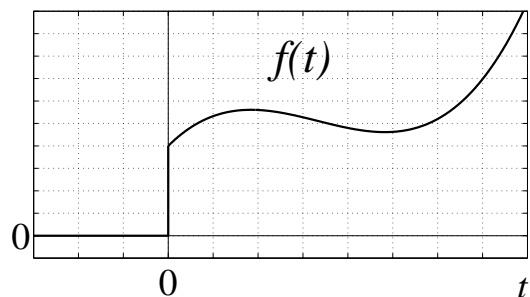
Si noti che tale funzione $f(t)$ è discontinua nell'origine, poichè vale $f(0^-) = 0$.

Teorema della traslazione nel tempo

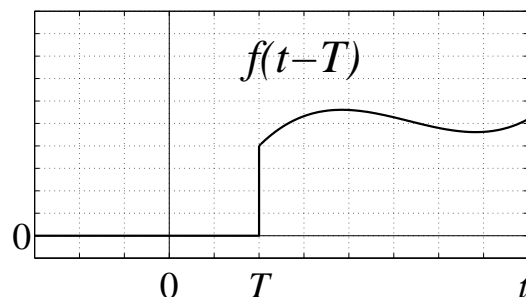
Sia $f(t)$ una funzione con trasformata di Laplace $F(s)$ e sia $f(t - T)$, con $T > 0$, una funzione ottenuta dalla $f(t)$ per traslazione “in avanti” nel tempo. Vale

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-Ts} F(s).$$

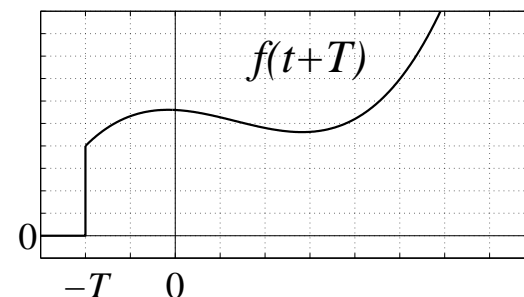
NB: Se $f(t)$ non è nulla tra 0 e T , il teorema non può essere applicato per traslazione “all’indietro” nel tempo, cioè per calcolare la trasformata della funzione $f(t + T)$ con $T > 0$, perché in tal caso la $f(t + T)$ non sarebbe identicamente nulla per $t < 0$.



(a)

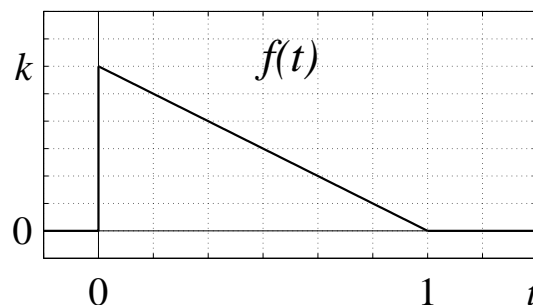


(b)



(c)

Esempio: La funzione $f(t)$ in figura è la somma di tre funzioni elementari.



- $f_1(t) = k\delta_{-1}(t)$: un gradino di ampiezza k applicato in $t = 0$;
- $f_2(t) = -k t \delta_{-1}(t)$: una rampa lineare di pendenza $-k$ applicata in $t = 0$;
- $f_3(t) = k(t - 1) \delta_{-1}(t - 1)$: una rampa lineare di pendenza k applicata in $t = 1$.

Dunque vale

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = k\delta_{-1}(t) - kt\delta_{-1}(t) + k(t - 1)\delta_{-1}(t - 1)$$

e trasformando a termine a termine otteniamo

$$F(s) = \frac{k}{s} - \frac{k}{s^2} + \frac{k}{s^2} e^{-s}.$$

◇

Trasformata di funzioni periodiche

Sia $f(t)$ una funzione periodica per $t \geq 0$ con periodo T . Chiameremo *funzione base* di $f(t)$ la funzione che coincide con $f(t)$ nel primo periodo e vale 0 altrove:

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in [0, T), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Se $F(s)$ e $F_0(s)$ sono le trasformate di $f(t)$ e di $f_0(t)$ vale $F(s) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-Ts}}$.

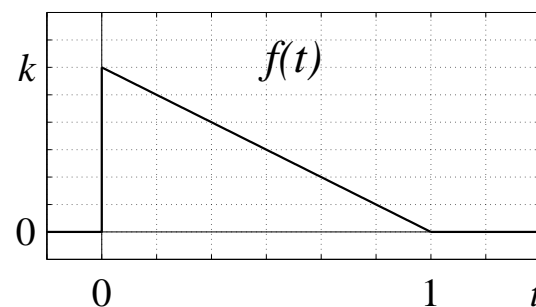
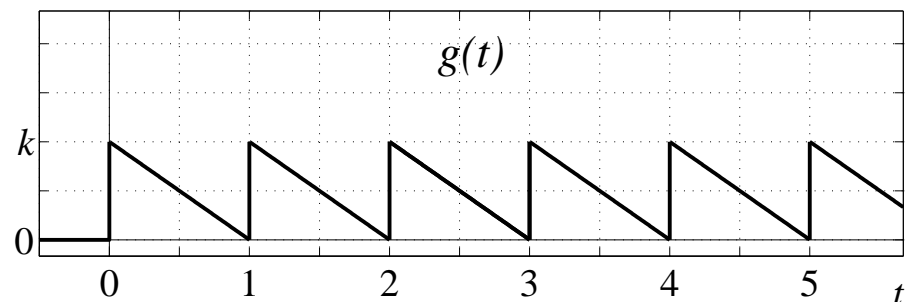
Dimostrazione. Poiché

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t - T) + f_0(t - 2T) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} f_0(t - iT)$$

e dunque

$$F(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_0(t - iT)] = \sum_{i=0}^{\infty} F_0(s) e^{-iT s} = F_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-iT s} = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-Ts}}.$$

Esempio: La funzione $g(t)$ in figura è periodica di periodo 1 e la sua funzione base è la funzione $f(t)$, la cui trasformata $F(s)$ è stata calcolata nel precedente esercizio.



Dunque vale

$$G(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{k}{s} - \frac{k}{s^2} + \frac{k}{s^2} e^{-s} \right).$$

Teorema della convoluzione

Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni tali che $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La trasformata di Laplace della loro convoluzione

$$h(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

vale

$$H(s) = \mathcal{L} [h(t)] = \mathcal{L} [f(t)] \mathcal{L} [g(t)] = F(s)G(s).$$

L'evoluzione forzata dell'uscita è la convoluzione dell'ingresso con la risposta impulsiva (Duhamel):

$$y_f(t) = \int_0^t w(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Grazie a questo teorema il “complicato” *integrale di convoluzione* si riduce al “semplice” *prodotto* fra la trasformata dell'ingresso e quella della risposta impulsiva:

$$Y_f(s) = W(s)U(s).$$

Antitrasformazione delle funzioni razionali

Definizione Una **funzione razionale** è un rapporto di polinomi a coefficienti reali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Essa è detta **propria** se vale $n \geq m$ e **strettamente propria** se $n > m$.

NB: Se una funzione $f(t)$ può essere scritta come combinazione lineare di rampe esponenziali, allora la sua trasformata di Laplace è appunto una funzione razionale.

È possibile porre la funzione $F(s)$ nella **forma zeri-poli** fattorizzando

$$N(s) = b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) \quad \text{e} \quad D(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K' (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

dove si suppone ancora che la $F(s)$ sia in **forma minima**, cioè che essa non abbia alcun polo coincidente con uno zero.

Si considereranno separatamente diversi casi.

- **Caso 1**

La funzione $F(s)$ è **strettamente propria** e tutti i suoi **poli hanno molteplicità unitaria**.

- **Caso 2**

La funzione $F(s)$ è **strettamente propria** e uno o più **poli hanno molteplicità maggiore di uno**.

- **Caso 3**

La funzione $F(s)$ è **propria ma non strettamente**. (NB: non tratteremo il caso delle funzioni non proprie perché non descrivono sistemi causali)

- **Caso 4**

La funzione $F(s)$ è **la somma di funzioni razionali moltiplicate per un fattore e^{-sT}** che corrisponde ad un elemento di ritardo.

Caso 1: $F(s)$ strettamente propria con poli di molteplicità unitaria

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K'(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

con $n > m$, e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$ ammette il seguente **sviluppo di Heaviside**:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i} = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{R_n}{s - p_n}.$$

R_i è detto **residuo** del polo p_i e questa forma di $F(s)$ è detta **residui-poli**.

Antitrasformando il generico termine vale

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_i}{s - p_i} \right] = R_i e^{p_i t} \delta_{-1}(t),$$

e dunque

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_i}{s - p_i} \right] = \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t} \delta_{-1}(t).$$

Calcolo dei residui

Il generico residuo R_i dello sviluppo di Heaviside vale

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s).$$

Esempio: La seguente funzione ha $n = 2 > m = 1$; i due poli sono $p_1 = 0$ e $p_2 = -2$.

$$F(s) = \frac{s + 8}{s^2 + 2s} = \frac{s + 8}{s(s + 2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s + 2}$$

e vale

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 8}{s + 2} = 4,$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2) F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s + 8}{s} = -3.$$

Dunque

$$F(s) = \frac{4}{s} - \frac{3}{s + 2} \implies f(t) = (4 - 3e^{-2t})\delta_{-1}(t).$$

Poli complessi e coniugati

Data una coppia di poli complessi e coniugati $p, p' = \alpha \pm j\omega$, siano $R, R' = u \pm jv$ i corrispondenti residui (anche essi sono complessi e coniugati).

I forma: detto

$$M = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right),$$

vale

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R}{s-p} + \frac{R'}{s-p'} \right] = 2Me^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) \delta_{-1}(t).$$

II forma: detto

$$B = 2u, \quad C = -2v,$$

vale

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R}{s-p} + \frac{R'}{s-p'} \right] = [Be^{\alpha t} \cos(\omega t) + Ce^{\alpha t} \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t)$$

Esempio: Si consideri la funzione razionale

$$F(s) = \frac{20}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{20}{s(s + 1 - j2)(s + 1 + j2)}$$

Vale $n = 3 > m = 1$ e poli $p_1 = 0$ e tale funzione ha poli $p, p' = \alpha \pm j\omega = -1 \pm j2$.
Dunque lo sviluppo di Heaviside vale:

$$F(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R}{s + 1 - j2} + \frac{R'}{s + 1 + j2}$$

Si calcolano i residui:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20}{s^2 + 2s + 5} = 4,$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{s \rightarrow -1+j2} (s + 1 - j2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -1+j2} \frac{20}{s(s + 1 + j2)} \\ &= \frac{20}{-8 - j4} = -2 + j = u + jv. \end{aligned}$$

I forma

$$M = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = 2.68 \text{ rad}$$

e antitrasformando si ottiene

$$\begin{aligned} f(t) &= (R_1 + 2Me^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)) \delta_{-1}(t) \\ &= \left(4 + 2\sqrt{5}e^{-t} \cos(2t + 2.68)\right) \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

II forma

$$B = 2u = -4, \quad C = -2v = -2,$$

l'antitrasformata di $F(s)$ vale

$$\begin{aligned} f(t) &= (R_1 + Be^{\alpha t} \cos(\omega t) + Ce^{\alpha t} \sin(\omega t)) \delta_{-1}(t) \\ &= (4 - 4e^{-t} \cos(2t) - 2e^{-t} \sin(2t)) \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Caso 2: $F(s)$ strettamente propria con poli di molteplicità non unitaria

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K'(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)^{\nu_1}(s - p_2)^{\nu_2} \cdots (s - p_r)^{\nu_r}}$$

con $\sum_{i=1}^r \nu_i = n > m$, e r poli distinti p_i ($i = 1, \dots, r$) ciascuno con molteplicità ν_i .

Essa ammette uno sviluppo di Heaviside in cui ad ogni polo p_i corrisponde una sequenza $F_i(s)$ di ν_i termini residuo-polo della forma

$$F_i(s) = \frac{R_{i,0}}{(s - p_i)} + \frac{R_{i,1}}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{R_{i,\nu_i-1}}{(s - p_i)^{\nu_i}} = \sum_{k=0}^{\nu_i-1} \frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^{k+1}},$$

e dunque lo sviluppo di Heaviside della funzione vale:

$$F(s) = \sum_{i=1}^r F_i(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\nu_i-1} \frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^{k+1}}.$$

Dallo sviluppo di Heaviside è immediato calcolare l'antitrasformata: per il generico termine

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^{k+1}} \right] = R_{i,k} \frac{t^k}{k!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t)$$

si ottiene una rampa esponenziale e dunque vale anche

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\nu_i-1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^{k+1}} \right] = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\nu_i-1} R_{i,k} \frac{t^k}{k!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t).$$

Calcolo dei residui

Dato un polo p_i , i residui $R_{i,j}$ dello sviluppo di Heaviside valgono

$$R_{i,\nu_i-1} = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)^{\nu_i} F(s),$$

$$R_{i,\nu_i-2} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} (s - p_i)^{\nu_i} F(s),$$

$$R_{i,\nu_i-3} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s - p_i)^{\nu_i} F(s),$$

e in generale per $j \in [1, \dots, \nu_i]$ vale

$$R_{i,\nu_i-j} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} (s - p_i)^{\nu_i} F(s).$$

Esempio: La funzione $F(s) = \frac{s-6}{s^2(s+3)}$ con $n = 3 > m = 1$ e poli $p_1 = 0$ di molteplicità $\nu_1 = 2$, e $p_2 = -3$ di molteplicità $\nu_2 = 1$ ha sviluppo

$$F(s) = \frac{R_{1,0}}{s} + \frac{R_{1,1}}{s^2} + \frac{R_2}{s+3}$$

Calcolo i residui:

$$R_{1,1} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s-6}{s+3} = -2,$$

$$R_{1,0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{s-6}{s+3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{9}{(s+3)^2} = 1,$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) F(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s-6}{s^2} = -1.$$

Dunque

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+3} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = (1 - 2t - e^{-3t})\delta_{-1}(t).$$

Poli complessi e coniugati

Data una coppia di poli complessi e coniugati $p, p' = \alpha \pm j\omega$, sia

$$F(s) = \frac{R}{(s - p)^{k+1}} + \frac{R'}{(s - p')^{k+1}}$$

dove $k \in \mathbb{N}$ e $R, R' = u \pm jv$.

I forma

Posto $M = \sqrt{u^2 + v^2}$ e $\phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$, vale

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = 2M \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) \delta_{-1}(t).$$

II forma

Posto $B = 2u$ e $C = -2v$, vale

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \left[B \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \cos(\omega t) + C \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \sin(\omega t) \right] \delta_{-1}(t).$$

Esempio: Si consideri la funzione razionale Si desidera antitrasformare la funzione

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{(s - j)^2(s + j)^2}$$

che ha poli $p, p' = \alpha \pm j\omega = \pm j$ di molteplicità 2. Lo sviluppo di Heaviside di tale funzione vale dunque

$$F(s) = \frac{R_0}{s - j} + \frac{R'_0}{s + j} + \frac{R_1}{(s - j)^2} + \frac{R'_1}{(s + j)^2}.$$

Vale

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow j} (s - j)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow j} \frac{1}{(s + j)^2} = -0.25 = u_1 + jv_1,$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \lim_{s \rightarrow j} \frac{d}{ds} (s - j)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow j} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s + j)^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow j} \frac{-2}{(s + j)^3} = -j0.25 = u_0 + jv_0. \end{aligned}$$

$$R_0 = -j0.25 = u_0 + jv_0, \quad R_1 = -0.25 = u_1 + jv_1.$$

I forma

$$M_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2} = 0.25, \quad \phi_0 = \arctan\left(\frac{v_0}{u_0}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$M_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = 0.25, \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{v_1}{u_1}\right) = \pi,$$

$$\begin{aligned} f(t) &= [2M_0e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi_0) + 2M_1te^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi_1)] \delta_{-1}(t) \\ &= [0.5 \cos(t - \frac{\pi}{2}) + 0.5t \cos(t + \pi)] \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

II forma

$$B_0 = 2u_0 = 0, \quad C_0 = -2v_0 = 0.5,$$

$$B_1 = 2u_1 = -0.5, \quad C_1 = -2v_1 = 0.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= [B_0e^{\alpha t} \cos(\omega t) + C_0e^{\alpha t} \sin(\omega t) + B_1te^{\alpha t} \cos(\omega t) + C_1te^{\alpha t} \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t) \\ &= [0.5 \sin(t) - 0.5t \cos(t)] \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Caso 3: $F(s)$ propria ma non strettamente

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Vale:

$$N(s) = K' D(s) + R(s),$$

dove $K' = \frac{b_n}{a_n}$ è il **quoziente** (scalare) e $R(s)$ è il **resto** (polinomio di grado $m' < n$).

Può dunque porsi:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K' D(s) + R(s)}{D(s)} = K' + \frac{R(s)}{D(s)} = K' + F'(s),$$

dove $F'(s)$ è strettamente propria e può antitrasformarsi con le regole già viste.

Antitrasformando:

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \mathcal{L}^{-1} [K'] + \mathcal{L}^{-1} [F'(s)] = K' \delta(t) + f'(t).$$

Esempio: Si consideri la funzione razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 5s + 3}{2s^2 + 6s + 4}$$

con $m = n = 2$. Per eseguire la divisione di $N(s)$ per $D(s)$ costruiamo la tabella

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} 1 & 5 & 3 & & 2 & 6 & 4 \\ \hline -1 & -3 & -2 & & & & \\ \hline 0 & 2 & 1 & & & & \\ \hline \end{array}$$

da cui si ricava che $N(s) = K'D(s) + R(s)$ con $K' = \frac{1}{2}$ e $R(s) = 2s + 1$.

Dunque la funzione può essere posta nella forma

$$F(s) = \frac{b_2}{a_2} + \frac{R(s)}{D(s)} = K' + F'(s) = \frac{1}{2} + \frac{2s + 1}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{(s + 1)} + \frac{\frac{3}{2}}{(s + 2)}.$$

da cui antitrasformando si ottiene

$$f(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}(-e^{-t} + 3e^{-2t})\delta_{-1}(t).$$

Caso 4: $F(s)$ con elementi di ritardo

Sia $F(s)$ una funzione che può essere scritta come

$$F(s) = F_1(s)e^{-sT_1} + F_2(s)e^{-sT_2} + \dots + F_p(s)e^{-sT_p}$$

dove $F_i(s)$ è una funzione razionale propria e $T_i \geq 0$ (per $i = 1, \dots, p$).

Detto $f_i(t) = \mathcal{L}^{-1} [F_i(s)]$, per $i = 1, \dots, p$, vale:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = f_1(t - T_1) + f_2(t - T_2) + \dots + f_p(t - T_p).$$

Esempio: Si consideri la funzione $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-3s}$. Detto

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s} \right] = 2\delta_{-1}(t), \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = t\delta_{-1}(t), \quad f_3(t) = -f_2(t) = -t\delta_{-1}(t),$$

vale anche

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = f_1(t) + f_2(t - 1) + f_3(t - 3) \\ &= 2\delta_{-1}(t) + (t - 1)\delta_{-1}(t - 1) - (t - 3)\delta_{-1}(t - 3). \end{aligned}$$