

Richiami di Algebra Lineare

1 Vettori

Si definisce *vettore* complesso di dimensione n , $x \in \mathbb{C}^n$, una collezione ordinata di elementi $x_i \in \mathbb{C}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Tra vettori in \mathbb{C}^n si definiscono le usuali operazioni di somma, sottrazione e moltiplicazione per uno scalare $\alpha \in \mathbb{C}$. Un insieme di vettori, insieme con le operazioni suddette costituisce uno *spazio vettoriale* \mathcal{V} . Si rimanda il lettore ai corsi di base per i concetti di sottospazi, dipendenza lineare, basi, etc. . .

Tra vettori è inoltre definita l'operazione di *prodotto interno*: dati $x, y \in \mathbb{C}^n$, si definisce prodotto interno $\langle x, y \rangle$ la quantità *scalare*

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \sum_{i=1}^n y_i^* x_i,$$

dove y^* è un vettore riga che indica il *trasposto coniugato* del vettore (colonna) y . Nel caso che y abbia elementi reali, l'operatore $*$ si riduce al semplice operatore di trasposizione (indicato nel seguito con l'apice T). Quindi, se $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = y^T x = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Si definisce *norma euclidea* del vettore $x \in \mathbb{C}^n$ il numero reale non-negativo $\|x\|$, tale che

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Si definisce *base* di uno spazio vettoriale \mathcal{V} , un insieme di vettori di \mathcal{V} linearmente indipendenti, tali che ogni elemento di \mathcal{V} può essere espresso in modo unico come combinazione lineare di detti vettori. I vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}^n\}$ costituiscono una base di \mathcal{V} se e solo se $\forall v \in \mathcal{V}$, $\exists! a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, tali che

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k.$$

Se lo spazio vettoriale \mathcal{V} ha una base costituita da k elementi, allora k è detta *dimensione* di \mathcal{V} . *Attenzione*: per ogni dato spazio vettoriale la base NON è unica, si pensi ad esempio a sistemi di riferimento diversi in due dimensioni.

2 Matrici

Una matrice a elementi reali (o complessi) è una tabella ordinata di numeri reali (o complessi). mn numeri x_i possono infatti essere organizzati per righe e colonne nella matrice $X = [x_{ij}]$ come

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Si scriverà $X \in \mathbb{R}^{n,m}$ oppure $X \in \mathbb{C}^{n,m}$, per designare una matrice con n righe ed m colonne, ad elementi reali o complessi, rispettivamente.

Per le matrici sono definite le usuali operazioni di somma tra matrici di eguale dimensione (si sommano tra loro gli elementi di pari posizione) e di moltiplicazione per uno scalare (si moltiplicano per lo scalare tutti gli elementi della matrice).

Una matrice $X \in \mathbb{R}^{n,m}$ può essere pensata anche come collezione dei vettori che ne costituiscono le righe o le colonne, cioè

$$X = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix}$$

dove $x_i \in \mathbb{R}^m$ è il vettore contenente gli elementi della i -esima riga di X , oppure

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]$$

dove $x_j \in \mathbb{R}^n$ è il vettore contenente gli elementi della j -esima colonna di X .

Il prodotto tra matrici è definito nel seguente modo: date $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$, il prodotto (detto anche prodotto riga-colonna) si calcola come

$$AB \in \mathbb{R}^{n,n} = \begin{bmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & \cdots & a_1^T b_n \\ a_2^T b_1 & a_2^T b_2 & \cdots & a_2^T b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^T b_1 & a_n^T b_2 & \cdots & a_n^T b_n \end{bmatrix}$$

dove $a_i^T \in \mathbb{R}^m$ è la i -esima riga di A , e b_j è la j -esima colonna di B . *Attenzione:* Il prodotto di matrici NON è commutativo, cioè, in generale

$$AB \neq BA.$$

2.1 Determinanti, matrici singolari, matrice inversa

Ad una generica matrice quadrata (uguale numero di righe e colonne) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, si associa un numero reale detto *determinante* della matrice A : $d = \det(A)$. Per $n = 1, 2$ si ha

$$\det[a_{11}] = a_{11} \tag{2}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

Per il calcolo dei determinanti in generale, si rimanda ai testi di base. Si tengano presente le seguenti proprietà dei determinanti

$$\det A^T = \det A \quad (4)$$

$$\det A^* = (\det A)^* \quad (5)$$

$$\det(AB) = \det(BA) \quad (6)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \text{ se } \det A \neq 0. \quad (7)$$

Una matrice quadrata A si dice *singolare* se il suo determinante è nullo, altrimenti A è detta *invertibile*. Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è tale che $\det A \neq 0$, allora esiste una matrice A^{-1} tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, dove I è detta *matrice identità* e A^{-1} è detta *matrice inversa* di A . Per $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i seguenti fatti sono equivalenti

1. A è non-singolare.
2. Esiste l'inversa A^{-1} .
3. $\text{rank}A = n$.
4. le righe e le colonne di A sono linearmente indipendenti.
5. $\det A \neq 0$.
6. Il sistema lineare $Ax = b$ ha una soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$.
7. 0 non è autovalore di A (vedi il seguito).

La matrice inversa può essere calcolata tramite la formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

dove $\text{adj}A$ indica la *matrice aggiunta* di A . L'elemento di $\text{adj}A$ in posizione riga i e colonna j è definito come

$$[\text{adj}A]_{ij} \doteq (-1)^{i+j} \det A^{(ji)}, \quad (8)$$

dove con il simbolo $A^{(ji)}$ si intende la matrice di dimensioni $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la riga j e la colonna i dalla matrice A . Ad esempio, l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Possono essere inoltre utili le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \quad A, B, D : \text{matrici.} \\ (A + BCD)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad \text{Lemma di Inversione.} \end{aligned}$$

2.2 Autovalori, autovettori e basi canoniche

Data una generica matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, si voglia determinare un vettore non nullo v tale che

$$Av = \lambda v$$

dove λ è, in generale, un numero complesso. Si riscriva l'equazione di cui sopra come

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (9)$$

tale equazione è risolubile se e solo se

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \quad (10)$$

La precedente è una equazione polinomiale in λ , le cui radici λ_i , $i = 1, \dots, n$ sono dette *autovalori* della matrice A ; $p(\lambda)$ è detto *polinomio caratteristico* della matrice A . Si supponga nel seguito che i λ_i siano distinti. Per ogni λ_i , il sistema (9) è risolubile per il corrispondente v_i . v_i è detto *autovettore* (destrò) di A , associato all'autovalore λ_i . La matrice $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, contenente per colonne gli autovettori di A , è detta *matrice degli autovettori* o *matrice modale* di A .

Una matrice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *simile* ad $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, se esiste una matrice non-singolare M , tale che

$$B = M^{-1}AM.$$

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e, di conseguenza gli stessi autovalori (anche tenuto conto delle molteplicità) e lo stesso determinante.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori linearmente indipendenti (l.i.). Questa proprietà è sempre verificata nel caso di matrici con autovalori distinti, cioè autovalori distinti implica diagonalizzabilità, ma non viceversa. La matrice di similarità che diagonalizza A è data proprio dalla matrice degli autovettori V , infatti

$$\begin{aligned} V^{-1}AV &= V^{-1}[Av_1, Av_2, \dots, Av_n] \\ &= V^{-1}[\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n] = V^{-1}[v_1, \dots, v_n]\Lambda \\ &= V^{-1}V\Lambda = \Lambda, \end{aligned}$$

dove $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

La trasformazione di similarità data dalla matrice V riveste una importanza fondamentale in quasi ogni ramo dell'ingegneria e delle scienze matematiche. Si vedranno in seguito alcune applicazioni della diagonalizzazione di una matrice e della *espansione modale*. Per espansione modale si intende che, dato un operatore descritto da una matrice diagonalizzabile A , un generico vettore dello spazio \mathbb{R}^n può essere espresso come combinazione lineare degli autovettori di A , v_i . L'azione dell'operatore A su un generico vettore $x \in \mathbb{R}^n$ può così essere studiata in maniera particolarmente semplice come

$$Ax = A\left(\sum p_i v_i\right) = \sum p_i \lambda_i v_i.$$

Sulla teoria degli spazi lineari e delle matrici sono stati scritti innumerevoli testi. Questo breve riepilogo non pretende pertanto di essere esauriente e si rimanda per ogni dubbio ai testi dei corsi di base di analisi matematica, algebra lineare e geometria.

3 Sistemi di equazioni lineari

Sia H una matrice data ad elementi reali di dimensione $N \times n$ ($H \in \mathbb{R}^{N,n}$), sia $y \in \mathbb{R}^N$ un vettore dato e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un vettore incognito. Si vuole studiare la soluzione del sistema di equazioni lineari

$$Hx = y. \quad (11)$$

Se si denotano con $h_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, n$, i vettori che costituiscono le colonne di H , si può osservare che il sistema (11) ammette almeno una soluzione se e solo se y è una combinazione lineare delle colonne di H : in questo caso il sistema è detto *consistente*. Per formalizzare questo concetto si definisce il *range* (detto anche *span*) di F come l'insieme

$$\mathcal{R}(H) = \{\xi : \xi = Ha, a \in \mathbb{R}^n\},$$

quindi il sistema è consistente se e solo se $y \in \mathcal{R}(H)$.

La domanda che ci si pone successivamente è: quando può esistere più di una soluzione? Non è difficile verificare che questo può accadere solo se $\exists \xi \neq 0$ tale che $H\xi = 0$. Per formalizzare questo fatto si definisce lo *spazio nullo* (detto anche *kernel*) di H come l'insieme

$$\mathcal{N}(H) = \{a : Ha = 0, a \in \mathbb{R}^n\},$$

quindi il sistema (11) ha più di una soluzione se e solo se $y \in \mathcal{R}(H)$ e $\mathcal{N}(H)$ non è vuoto. In sintesi, vale il seguente fatto

Fatto 1 *Si consideri il sistema (11).*

1. *Il sistema ammette (almeno) una soluzione se e solo se $y \in \mathcal{R}(H)$.*
2. *Il sistema ha una unica soluzione se e solo se, oltre alla condizione di cui al punto 1), H ha rango colonna pieno (cioè $\text{rank}H = n$).*
3. *Il sistema ha più di una soluzione se e solo se, oltre alla condizione di cui al punto 1), H non ha rango colonna pieno. Inoltre, dette x_1, x_2 due qualsiasi soluzioni del sistema si ha che $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(H)$.*

3.0.1 Proprietà di range e spazio nullo

Se si definisce il *complemento ortogonale* di uno spazio lineare reale \mathcal{L} , lo spazio

$$\mathcal{L}^\perp = \{x \in \mathbb{C}^n : x^T y = 0, \forall y \in \mathcal{L}\},$$

valgono allora le seguenti proprietà

1. $\mathcal{N}(H) = \mathcal{R}^\perp(H^T)$
2. $\mathcal{N}(H^T) = \mathcal{R}^\perp(H)$
3. $\mathcal{R}(H) = \mathcal{N}^\perp(H^T)$
4. $\mathcal{R}(H^T) = \mathcal{N}^\perp(H)$

5. $\mathcal{N}(H) \oplus \mathcal{R}(H^T) = \mathbb{C}^n$
6. $\mathcal{N}(H^T) \oplus \mathcal{R}(H) = \mathbb{C}^N$
7. $\mathcal{R}(H^T H) = \mathcal{R}(H)$
8. $\mathcal{N}(H^T H) = \mathcal{N}(H)$,

dove il simbolo \oplus indica la somma diretta di insiemi.

3.1 Soluzione a minimo errore quadratico (minimi quadrati)

Consideriamo il sistema (11) nel caso in cui $N \geq n$ (sistema sovra-determinato) e $y \notin \mathcal{R}(H)$ (sistema inconsistente). In questo caso non esiste nessuna soluzione x che soddisfa il sistema. Cerchiamo allora un vettore \hat{x} che risolva approssimativamente il sistema, minimizzando l'errore residuo, cioè

$$\hat{x} = \arg \min_x \|Hx - y\|. \quad (12)$$

Fatto 2 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione del problema (12) se e solo se soddisfa le cosiddette equazioni normali

$$H^T H \hat{x} = H^T y. \quad (13)$$

Le equazioni normali sono sempre consistenti (cioè la soluzione ai minimi quadrati esiste sempre). Inoltre, se H ha rango pieno la soluzione \hat{x} è unica ed è data da

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T y.$$

Il valore del residuo per la soluzione ottima è dato da

$$\|H\hat{x} - y\|^2 = y^T (I - H(H^T H)^{-1} H^T) y.$$

3.2 Soluzione a norma minima

Consideriamo il sistema (11) con $N \leq n$ (sistema sotto-determinato) ed H a rango pieno. In questo caso esistono più soluzioni: tra le varie soluzioni possibili scegliamo quella a norma minima. Tale soluzione soddisfa ad equazioni normali duali del tipo

$$Hx = HH^T \alpha \quad (14)$$

$$y = HH^T \alpha \quad (15)$$

e la soluzione a norma minima è data dalla formula

$$x = H^T (HH^T)^{-1} y.$$

Per un generico sistema lineare, una soluzione che minimizza l'errore quadratico e contemporaneamente ha norma minima, si calcola tramite la pseudo inversa di Moore-Penrose H^\dagger

$$x = H^\dagger y.$$

La pseudo inversa H^\dagger si può calcolare tramite il comando Matlab `pinv`.

4 Esercizi proposti

Esercizio 1 Utilizzando quanto sopra presentato, si determini una formula per l'inversione della matrice a blocchi

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 Si determinino, senza fare calcoli, gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

e si dica se essa può essere diagonalizzata per mezzo di una trasformazione di similarità.

Esercizio 3 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

determinarne gli autovalori e i rispettivi autovettori, dire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, verificare che $V^{-1}AV$ è una matrice diagonale (V matrice degli autovettori di A).

Esercizio 4 (Espansione Modale). Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ una matrice diagonalizzabile e siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ gli autovettori di A , costituenti una base di \mathbb{C}^n . Per definizione di base, ogni vettore $x \in \mathbb{C}^n$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori della base:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

dove gli α_i sono opportuni coefficienti (scalari).

1. Dato un vettore $x \in \mathbb{C}^n$, determinare i coefficienti α_i della sua espansione modale.
2. Come si semplifica il calcolo degli α_i , nel caso in cui la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia ortonormale? Ricordarsi che una base si dice ortonormale se $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$, dove

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$