

Richiami sui numeri complessi

1 Numeri complessi

Si definisce insieme dei *numeri complessi* \mathbb{C} , l'insieme degli elementi x tali che

$$x = a + jb, \quad (1)$$

dove a e b appartengono all'insieme dei numeri reali: $a, b \in \mathbb{R}$. Tali numeri estendono l'insieme dei reali e sono stati inizialmente introdotti per la soluzione di semplici equazioni algebriche del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

È infatti noto che tale equazione ammette soluzioni reali se e solo se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Se questo non accade, l'equazione ammette radici complesse, ossia numeri che contengono il simbolo

$$j = \sqrt{-1}$$

j è detto *unità immaginaria* ed è tale per cui

$$\begin{aligned} j^2 &= \sqrt{-1}^2 = -1 \\ j^3 &= jj^2 = -j \\ j^4 &= j^2j^2 = 1 \text{ etc...} \end{aligned}$$

2 Rappresentazioni dei numeri complessi

Un numero complesso $x = a + jb$, dove a è detta *parte reale* e b è detta *parte immaginaria*, è rappresentato graficamente sul piano come in Figura 1. Detto ρ il *modulo* di x , e detta φ la *fase* di x , sono valide le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{b}{a} \\ a &= \rho \cos \varphi \\ b &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

La rappresentazione (1) del numero complesso x è detta *cartesiana*. Si può anche rappresentare x tramite il suo modulo e fase: la forma

$$x = \rho e^{j\varphi} \quad (2)$$

si dice rappresentazione *esponenziale* (o polare) del numero complesso x . È anche utile ricordare che

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

da cui deriva la rappresentazione *trigonometrica* di x

$$x = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (3)$$

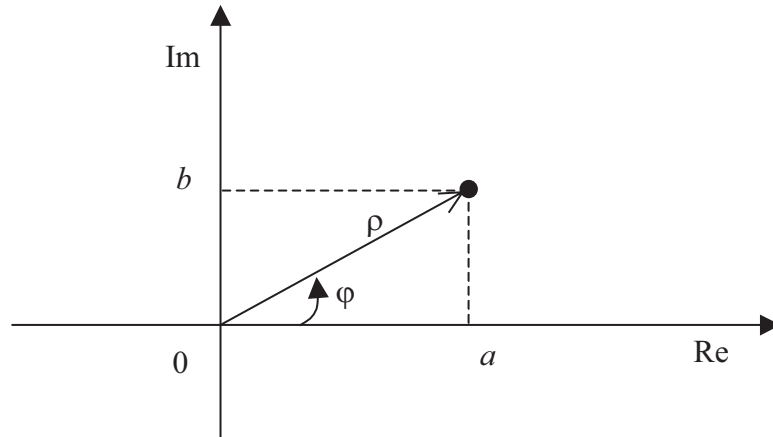


Figure 1: Piano complesso.

3 Algebra dei numeri complessi

Dato $x = a + jb$, si dice *complesso coniugato* di x il numero

$$x^* = a - jb$$

Si osservi che $(\rho e^{j\varphi})^* = \rho e^{-j\varphi}$. I numeri complessi si sommano e si sottraggono esattamente come i vettori bidimensionali (cfr. somma e sottrazione di forze planari)

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d).$$

Si noti che $x + x^*$ è puramente reale, mentre $x - x^*$ è un numero puramente immaginario.

Il prodotto di numeri complessi si può calcolare o dalla forma cartesiana o (più facilmente) dalla forma esponenziale, infatti

$$\rho_1 e^{j\varphi_1} \rho_2 e^{j\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Per l'esponenziale complesso valgono infatti le stesse regole algebriche che valgono per la funzione esponenziale reale. In particolare è valida la seguente identità

$$z = e^{(\alpha + j\beta)} = e^\alpha e^{j\beta},$$

quindi $|z| = e^\alpha$, $\arg z = \beta$. Si noti che xx^* è sempre un numero reale (verificare perchè), in particolare $xx^* = |x|^2$. Si verifichi inoltre che

$$x + x^* = 2\operatorname{Re}x; \quad x - x^* = 2j\operatorname{Im}x.$$

Il rapporto r tra numeri complessi z_1, z_2 è calcolabile come

$$r = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}.$$

4 Esercizi proposti

Esercizio 1 Calcolare il valore di $x + \frac{1}{x}$, con $x = \frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}$.

Esercizio 2 Calcolare tutti i valori di $\sqrt[6]{1}$ e disegnarli sul piano complesso.

Esercizio 3 Esprimere il logaritmo naturale di $z = \rho e^{j\varphi}$, ricordando che $z = \rho e^{j(\varphi+2k\pi)}$, e disegnarne il luogo sul piano complesso, per $k = 0, \pm 1, \pm 2$, etc.

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

dove $\lambda = \sigma + j\omega$. Si tracci l'andamento dei grafici delle funzioni $|f(t)|$ e $\text{Re}f(t)$, con $\omega = 1$ e per $\sigma = +1, -1, 0$.