

Fondamenti di Automatica

Esercitazione Riassuntiva

May 28, 2004

Esercizio 1

Si determinino le equazioni di stato del sistema elettrico riportato in figura 1.

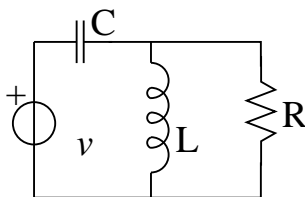


Figure 1: Circuito RCL.

Successivamente di calcolino gli autovalori del sistema nei due casi:

1. $C=0.5F$, $L=1H$, $R=3\Omega$;
2. $C=0.5F$, $L=0.5H$, $R=+\infty\Omega$.

Infine di determinino e si discutano le risposte libere originate dal sistema nei due casi supponendo che il condensatore abbia una tensione iniziale di 2V.

Esercizio 2

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_2 - x_2 \end{cases}$$

si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 3

Dato il sistema lineare caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2\alpha & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

si discutano le proprietà di stabilità, controllabilità e osservabilità al variare del parametro α reale.

Posto $\alpha = 7$, se è possibile, determinare una matrice costante K da porre in retroazione sugli stati, tale che il sistema risulti asintoticamente stabile.

Posto $\alpha = 7$, determinare un'osservatore asintotico per il sistema in oggetto.

Si confrontino mediante Matlab, le risposte libere e forzate (si supponga $u(t) = \sin(3t)$) del sistema e dell'osservatore.

Soluzione 1

Le variabili di stato in un sistema elettrico sono le tensioni sugli n condensatori e le correnti negli m induttori. Ne consegue che le equazioni di stato possono essere determinate scrivendo tante KCL quanti sono i condensatori e tante KVL quanti sono gli induttori. In particolare, per ogni condensatore si scrive un'equazione che coinvolga la corrente nel condensatore considerato, tutte le altre variabili di stato e gli ingressi, cioè equazioni del tipo

$$\begin{aligned} i_{C_1} &= f(v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, u) \\ &\vdots \\ i_{C_i} &= f(v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, u) \\ &\vdots \\ i_{C_n} &= f(v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, u). \end{aligned}$$

Inoltre per ogni induttore si scrive un'equazione che coinvolga la tensione sull'induttore considerato, tutte le altre variabili di stato e gli ingressi, cioè equazioni del tipo

$$\begin{aligned} v_{L_1} &= f(v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, u) \\ &\vdots \\ v_{L_i} &= f(v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, u) \\ &\vdots \\ v_{L_m} &= f(v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots, u). \end{aligned}$$

Nell'esercizio considerato abbiamo

$$\begin{cases} i_C = i_L + i_R \\ v_L = v - v_C. \end{cases}$$

Essendo

$$i_R = \frac{v - v_C}{R}$$

si ottiene

$$\begin{cases} i_C = i_L + \frac{v - v_C}{R} \\ v_L = v - v_C. \end{cases}$$

Quindi, riordinando si ha

$$\begin{cases} i_C = -\frac{v_C}{R} + i_L + \frac{v}{R} \\ v_L = -v_C + v. \end{cases} \quad (1)$$

Posto il vettore di stato

$$x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

e l'ingresso $u = v$ ne consegue che, sostituendo le equazioni costitutive dei condensatori e degli induttori, si ottengono le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siccome l'uscita non è definita possiamo scegliere di porre le due uscite uguali alle variabili di stato, cioè

$$\begin{cases} y_1 = v_C, \\ y_2 = i_L. \end{cases} \quad (2)$$

ottenendo, quindi, le matrici

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: Al fine di verificare la correttezza delle matrici è opportuno svolgere le operazioni $Ax+Bu$ e $Cx+Du$ e confrontarle con le equazioni di stato (1) e le trasformazioni d'uscita (2).

Le matrici risultano essere, nei due casi:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2/3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ne risulta che nei due casi gli autivalori (determinanti col comando $\text{eig}(\cdot)$ di matlab) sono:

1. $\lambda = -0.3333 \pm j1.3744$, cioè il sistema è asintoticamente stabile (gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa);
2. $\lambda = \pm j1.4142$, cioè il sistema è semplicemente stabile (gli autovalori hanno parte reale nulla).

Bisogna quindi aspettarsi che la risposta libera dell'uscita, nel primo caso tenda asintoticamente a zero, mentre nel secondo sia oscillante. Tali risposte sono riportate in Fig. 2 e Fig. 3.

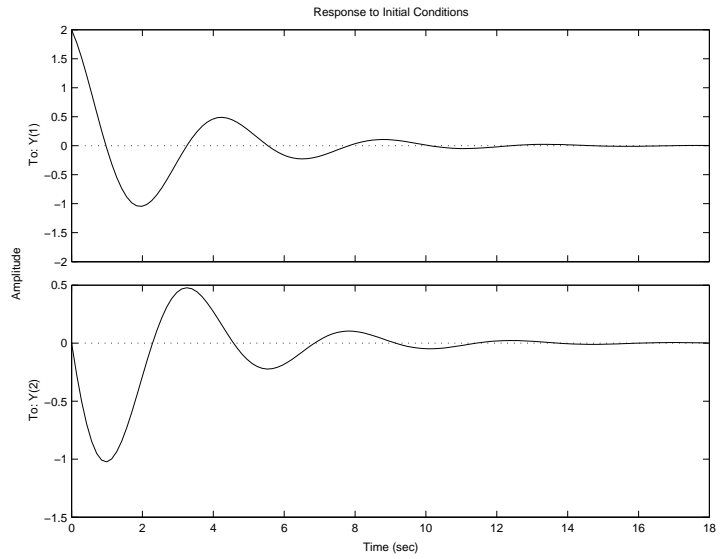


Figure 2: Risposta libera del sistema caratterizzato dalle matrici A_1, B_1 .

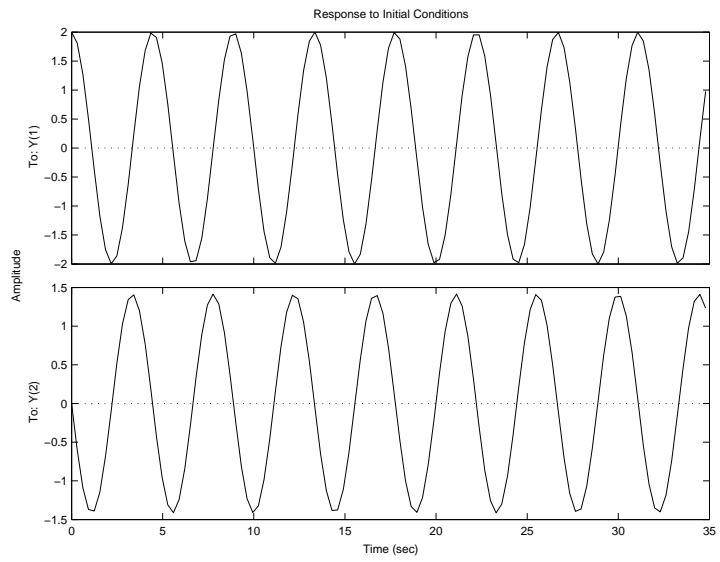


Figure 3: Risposta libera del sistema caratterizzato dalle matrici A_2, B_2 .

Soluzione 2

Gli esercizi sui sistemi non lineari si risolvono, in genere, secondo il seguente schema:

1. In primo luogo si determinano i punti di equilibrio imponendo $\dot{x} = 0$: In questo caso, dalla prima equazione, si ottiene $x_2^2 = 0$, da cui $x_2 = 0$. Imponendo questa soluzione nella seconda equazione, risulta che la condizione $\dot{x}_2 = 0$ è soddisfatta per ogni x_1 . Ne consegue che sono punti di equilibrio del sistema tutti i punti

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con x_1 qualsiasi.

2. Si calcola la matrice Jacobiana del sistema, che in questo caso risulta essere

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ -x_2 & -1 - x_1 \end{bmatrix}.$$

3. Si determina la matrice $J(\underline{x})$ nei punti di equilibrio. In questo caso si ha

$$J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 - x_1 \end{bmatrix}.$$

In seguito si determinano gli autovalori, che in questo caso risultano essere $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1 - x_1$. Ne consegue che se $x_1 < -1$ allora un autovalore ha parte reale positiva e quindi il sistema è instabile. Se $x_1 \geq -1$ bisogna ricorrere allo studio della funzione di Lyapunov. In questo caso limiteremo lo studio all'origine dello spazio degli stati che in questo caso soddisfa la condizione $x_1 \geq -1$ e quindi *potrebbe* essere stabile, asintoticamente stabile o instabile. Come noto, per gli altri punti di equilibrio si deve introdurre una traslazione degli stati.

4. Se non diversamente specificato, si utilizza la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

definita positiva nell'origine. La derivata $\dot{V}(x)$ in questo caso risulta essere

$$\dot{V}(x) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} x_2^2 \\ -x_1x_2 - x_2 \end{bmatrix} = x_1x_2^2 - x_1x_2^2 - x_2^2 = -x_2^2,$$

che risulta essere semidefinita positiva in qualsiasi intorno dell'origine (vale zero $\forall x_1$ se $x_2 = 0$). Ne consegue che l'origine è un punto di equilibrio stabile. È opportuno sottolineare che tale punto *potrebbe* essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile ma per dimostrarlo bisogna determinare una funzione di Lyapunov adatta. Nei grafici di Fig.5 sono riportate, a titolo di esempio, le funzioni $V(x)$ e $\dot{V}(x)$.

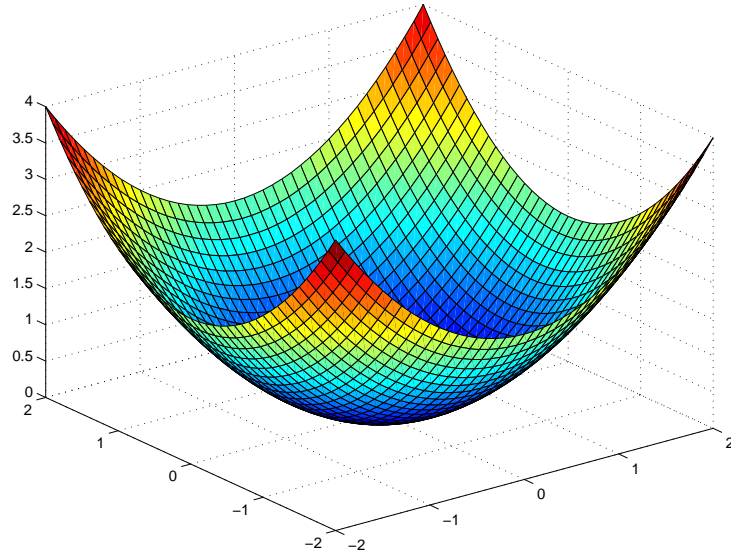


Figure 4: Funzione di Lyapunov e relativa derivata

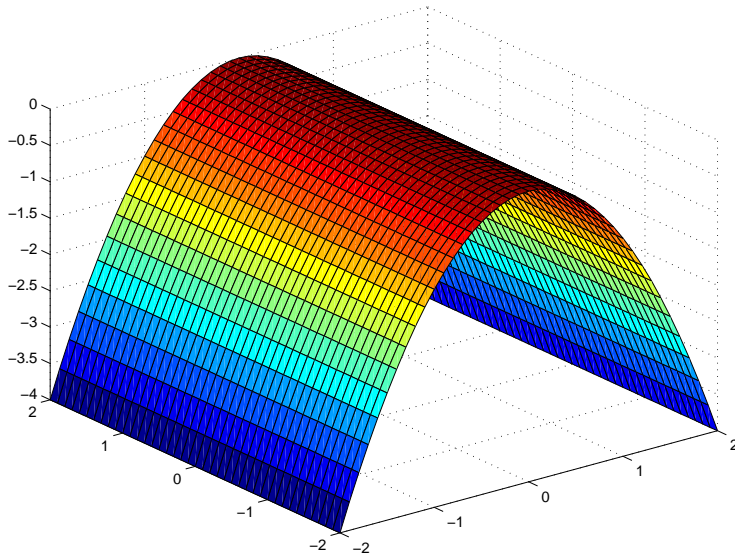


Figure 5: Derivada della funzione di Lyapunov

Soluzione 3

La stabilità del sistema è determinata dagli autovalori della matrice A. Essi sono la soluzione del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ che risulta essere:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2\alpha & \lambda + 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 - 4\alpha.$$

Siccome si tratta di un polinomio di secondo grado è sufficiente che tutti i coefficienti abbiano lo stesso segno perché le radici siano tutte a parte reale negativa. In questo caso deve essere $4 - 4\alpha < 0$, cioè $\alpha < 1$.

Le matrici di controllabilità ed osservabilità sono, rispettivamente

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2\alpha - 8 \end{bmatrix}, \quad M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & -4 \end{bmatrix}.$$

Imponendo $\det(M_c) = 0$ si ricava che per $\alpha = 7$ il sistema non è completamente controllabile, mentre imponendo $\det(M_o) = 0$ si ricava che per $\alpha = 0$ il sistema non è completamente osservabile. In particolare, dopo aver opportunamente definito le matrici, tramite la sequenza di comandi Matlab

```
>> [Atilde,Btilde,Ctilde,T]=ctrbf(A,B,C)
Atilde =
   -8.0000   -0.0000
   12.0000    3.0000
Btilde =
    0.0000
   -2.2361
Ctilde =
    0.4472   -0.8944
Tc =
   -0.8944    0.4472
   -0.4472   -0.8944
```

e ricordando la notazione di Matlab, si ricava che l'autovalore NON CONTROLLABILE quando $\alpha = 7$ è -8. Inoltre, tramite la sequenza di comandi

```
>> [Ahat,Bhat,Chat,To]=obsvf(A,B,C)
Ahat =
   -1    2
    0   -4
Bhat =
   -1
   -2
Chat =
    0   -1
```

$$T_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e ricordando la notazione di Matlab, si ricava che l'autovalore NON OSSERVABILE quando $\alpha = 0$ è -1.

Ne consegue che il sistema, per $\alpha = 7$ è stabilizzabile, in quanto l'autovalore che non si riesce a spostare è già a parte reale negativa.

Il calcolo delle matrici K da mettere in retroazione è possibile procedere manualmente come visto oppure concentrarsi sulla parte controllabile del sistema scegliendo come matrice di guadagno $\tilde{K} = [0 \ K_c]$.

Allora la matrice K_c può essere calcolata per mezzo del comando

```
>> Ac=3;
>> Bc=-2.2361;
>> Kc=-place(Ac,Bc,[-3])
K_c =
    2.6832
>> Ktilde=[0 Kc]
Ktilde =
         0    2.6832
>> K=Ktilde*T
K =
   -1.2000   -2.4000
>>
```

essendo A_c e B_c le sottomatrici della parte controllabile del sistema e -3 l'autovalore desiderato. Quindi la matrice da mettere in retroazione è $\tilde{K} = [-1.2 \ -2.4]$.

In effetti gli autovalori della matrice del sistema retroazionato risultano essere

```
>> eig(A+B*K)
ans =
   -2.9999
   -8.0000
```

dove -8 è l'autovalore non controllabile mentre -2.9999 è, a meno di un'approssimazione numerica, l'autovalore desiderato, cioè -3.

Infine il calcolo della matrice L dell'osservatore asintotico, può essere fatta nel modo consueto ponendo gli autovalori della matrice $(A+LC)$ in -1 e -2, oppure, mediante il comando Matlab

```
>> L=(-place(A',C',[-1 -2]'))'
L =
   -2
    2
```