F. Fagnani, A. Tabacco e P. Tilli

Introduzione all'Analisi Complessa e Teoria delle distribuzioni

21 marzo 2006

3

Serie di Taylor e di Laurent. Residui

3.1 Successioni e serie di numeri complessi

Una successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{C}$. Diremo che la successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $\ell \in \mathbb{C}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha $|c_n - \ell| < \varepsilon$. In simboli

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \text{ si ha } |c_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Geometricamente, questo significa che per valori di n sufficientemente grandi i punti c_n sono arbitrariamente vicini al limite ℓ. Non è difficile verificare che il limite, se esiste, è unico. Quando il limite esiste, diremo che la successione **converge a** ℓ; in tutti gli altri casi diremo che la successione **non converge**.

Come per i limiti di funzioni di variabile complessa, vale un risultato analogo ai Teoremi 1.4 e 1.6.

Teorema 3.1 *Supponiamo che* $c_n = a_n + ib_n$ *e* $\ell = \ell_{re} + i\ell_{im}$. *Allora*

a) $$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell_{re} \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell_{im}\,. \end{cases}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |c_n - \ell| = 0\,.$$

c) $$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |c_n| = |\ell|\,.$$

Dimostrazione. a) Supponiamo dapprima che $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$. Per definizione, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n > n_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - \ell_{re} + i(b_n - \ell_{im})| < \varepsilon\,.$$

Ma $|a_n - \ell_{re}| \le |a_n - \ell_{re} + i(b_n - \ell_{im})|$ *e* $|b_n - \ell_{im}| \le |a_n - \ell_{re} + i(b_n - \ell_{im})|\,.$
Conseguentemente, per ogni $n > n_\varepsilon$, risulta

$$|a_n - \ell_{re}| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |b_n - \ell_{im}| < \varepsilon\,;$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_{re} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \ell_{im}\,. \tag{3.1}$$

Viceversa, se vale la (3.1), per ogni $\varepsilon > 0$, esistono n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\forall n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \ell_{re}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \forall n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - \ell_{im}| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Pertanto, se $n_\varepsilon = \max(n_1, n_2)$, si ha

$$\forall n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell_{re} + i(b_n - \ell_{im})| \le |a_n - \ell_{re}| + |b_n - \ell_{im}| < \varepsilon\,;$$

ovvero

$$\forall n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |c_n - \ell| < \varepsilon$$

e dunque $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

b) Si osservi che, direttamente dalla definizione, si ha

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (z_n - \ell) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - \ell| = 0\,.$$

c) Il risultato segue immediatamente osservando che $\big||c_n| - |\ell|\big| \le \big|c_n - \ell\big|$. □

Osserviamo che nel punto c) non vale, in generale, l'implicazione inversa. Si pensi, ad esempio, alla successione $c_n = (-1)^n$. Risulta $|c_n| = 1$ e quindi la successione dei moduli $\{|c_n|\}$ converge a 1, mentre la successione di partenza $\{c_n\}$ non converge.

Esempio 3.2 Studiamo il comportamento della successione geometrica $c_n = z^n$, al variare di $z \in \mathbb{C}$.
Per $z = 1$, la successione converge a 1.
Per $|z| < 1$, utilizzando il punto b) del teorema precedente, risulta

$$\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |z^n| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} z^n = 0\,;$$

dunque anche in questo caso la successione converge.
Sia ora $|z| > 1$. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} |z|^n = \lim_{n\to\infty} |z^n| = +\infty\,,$$

la successione z^n non può convergere, altrimenti si contraddirebbe il punto c) del teorema precedente.
È possibile dimostrare, ma non è immediato, che la successione non converge neppure per $|z| = 1$ e $z \neq 1$. Riassumendo

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 1\,, & z = 1\,, \\ 0\,, & |z| < 1\,, \\ \text{non converge}, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

□

Come nel caso reale, la somma di infiniti numeri complessi (studio della convergenza di una serie) si definisce a partire dalle successioni. Più precisamente, sia $\{c_n\}$ una successione di numeri complessi. Consideriamo la successione delle ridotte o somme parziali $\{s_n\}$ definita, per ogni $n \geq 0$, come

$$s_0 = c_0\,, \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = s_{n-1} + c_n\,, \quad n \geq 1\,.$$

Diremo che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge a $s \in \mathbb{C}$ se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = s$. In tutti gli altri casi diremo che la serie non converge. Il numero s, se esiste, è detto **somma** della serie.

Dal Teorema 3.1 si ottiene il seguente risultato.

Teorema 3.3 *Supponiamo che $c_n = a_n + ib_n$ e $s = s_{re} + is_{im}$. Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge a s se e solo se le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono a s_{re} e s_{im}, rispettivamente.* □

Si osservi inoltre che il termine generale c_n di una serie convergente tende necessariamente a 0, in quanto tendono a 0 sia la sua parte reale a_n sia quella immaginaria b_n. In particolare, la successione $\{c_n\}$ è limitata, ossia esiste una costante $M > 0$ tale che $|c_n| \leq M$, per ogni n.

Esempio 3.4 Consideriamo la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, al variare di $z \in \mathbb{C}$. Se $z = 1$, sappiamo che la serie non converge. Sia ora $z \neq 1$, scriviamo

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

e utilizziamo l'Esempio 3.2 per concludere che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z}\,, & |z| < 1\,, \\ \text{non converge}\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

In conclusione, la serie converge e la sua somma vale $\dfrac{1}{1-z}$ solo se $|z| < 1$. □

Come per le serie a valori reali, diremo che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge assolutamente se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$. La convergenza assoluta implica la convergenza e si ha

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \, .$$

Si osservi che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ è una serie a termini reali positivi e quindi ad essa si possono applicare tutti i criteri studiati nei corsi di base di matematica.

Esempio 3.5 Verifichiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ converge. Infatti, $\left|\frac{i^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge (si applichi, ad esempio, il Criterio del rapporto). Dunque la serie data converge assolutamente. □

3.1.1 Serie di potenze

Particolarmente importanti per lo studio delle funzioni di variabile complessa sono le serie di potenze. Una serie di potenze ha la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $\{a_n\}$ successione di numeri complessi, detti **coefficienti** della serie e $z_0 \in \mathbb{C}$ detto **centro** della serie. Le definizioni e i risultati che seguono sono riferiti a serie con centro l'origine; ci si riconduce al caso generale mediante la sostituzione $w = z - z_0$. Si osservi che una serie di potenze converge sempre almeno nel suo centro z_0.

Il primo esempio di serie di potenze è la serie geometrica considerata nell'Esempio 3.4. Ricordiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{se} \quad |z| < 1$$

e la serie non converge per $|z| \geq 1$.

Vedremo che il comportamento di tale serie è tipico: infatti, proveremo che ogni serie di potenze converge all'interno di un cerchio e non converge al suo esterno eccetto nei casi limite in cui si ha convergenza solo nel centro della serie oppure per ogni valore di z. Più precisamente, vale il seguente risultato dovuto a Abel.

Teorema 3.6 *Per ogni serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *esiste un numero* R*, con* $0 \leq R \leq +\infty$*, detto* **raggio di convergenza** *con le seguenti proprietà:*

a) se $R = 0$*, la serie converge solo per* $z = 0$*;*

b) se $R > 0$, la serie converge assolutamente per ogni z con $|z| < R$; se $0 < \rho < R$, la serie converge uniformemente nel cerchio $\{|z| \le \rho\}$;
c) se $R = +\infty$, la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ e uniformemente in ogni cerchio $\{|z| \le \rho\}$ con $\rho > 0$.

Per dimostrare il teorema, premettiamo un risultato tecnico.

Lemma 3.7 *Sia data la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

a) Se esiste $z_1 \neq 0$ in cui la serie converge, allora la serie converge assolutamente per ogni z con $|z| < |z_1|$.
b) Se esiste $z_2 \neq 0$ in cui la serie non converge, allora la serie non converge per ogni z con $|z| > |z_2|$.

Dimostrazione. a) Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge, il suo termine generale $a_n z_1^n$ tende a 0 per $n \to \infty$ e dunque la successione $\{|a_n z_1^n|\}$ è limitata. Quindi esiste una costante $M > 0$ tale che $|a_n z_1^n| \le M$, per ogni n. Sia ora $z \neq 0$ tale che $|z| < |z_1|$; risulta

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \le M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n .$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ converge in quanto è una serie geometrica con $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$; pertanto, applicando il Criterio del confronto valido per serie numeriche reali, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente.
b) Se la serie convergesse in z con $|z| > |z_2|$, allora per la prima parte del lemma, dovrebbe convergere anche in z_2, contrariamente all'ipotesi. □

Il lemma appena dimostrato ci permette di definire il raggio di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ come l'estremo superiore dei moduli dei punti in cui la serie converge

$$R = \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}\} . \tag{3.2}$$

Torniamo ora alla dimostrazione del Teorema 3.6.

Dimostrazione. (del Teorema 3.6)
a) È immediata dalla definizione di raggio di convergenza (3.2).
b) Sia z con $|z| < R$. Dalla (3.2), esiste z_1 con $|z| < |z_1| < R$ in cui la serie converge. Per il punto a) del Lemma 3.7, la serie converge assolutamente in z.
Sia ora ρ tale che $0 < \rho < R$. Per quanto è stato appena dimostrato, la serie

converge assolutamente nel punto $z = \rho$, cioè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$ converge. Allora se $|z| \leq \rho$, si ha $|a_n z^n| \leq |a_n|\rho^n$. Per il Criterio di Weiertrass, la serie converge uniformemente in $\{|z| \leq \rho\}$.
c) La dimostrazione è analoga a quella relativa al punto b). □

Si noti che il teorema non fornisce alcuna indicazione sulla convergenza della serie nei punti della circonferenza $\{|z| = R\}$.

Esempi 3.8 a) Per quanto visto in precedenza, al serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$, così come la serie $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$. Infatti, applicando il Criterio del rapporto alla serie dei moduli, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|z|^{n+1}}{n|z|^n} = |z| .$$

Dunque la serie converge per ogni z con $|z| < 1$; inoltre non converge se $|z| > 1$ in quanto il termine generale non tende a 0.

b) Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Fissato $z \in \mathbb{C}$, studiamone la convergenza assoluta applicando ancora il Criterio del rapporto alla serie numerica così ottenuta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|z^n|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1 .$$

Dunque la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ e il suo raggio di convergenza R vale $+\infty$. Vedremo più avanti che la sua somma è la funzione analitica $f(z) = e^z$ (si veda l'Esempio 3.15).

c) Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Come sopra, fissato $z \in \mathbb{C}$, applichiamo il Criterio della radice alla serie dei moduli

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n^2}} = |z| .$$

Pertanto la serie converge se $|z| < 1$; non converge se $|z| > 1$ in quanto il termine generale non tende a 0; il raggio di convergenza vale quindi 1. Per studiare il comportamento della serie sulla circonferenza $\{|z| = 1\}$, osserviamo che la serie dei moduli si riduce alla serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge. In definitiva, la serie converge assolutamente (e uniformemente) in $\{|z| \leq 1\}$.

d) Non è difficile verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$ converge solo per $z = 0$. □

Per determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze senza ricorrere allo studio diretto della serie stessa, è possibile utilizzare i cosiddetti criteri del rapporto e della radice. Non riporteremo le dimostrazioni di tali teoremi in quanto sono del tutto analoghe a quelle già viste nei precedenti corsi di matematica validi per le serie di potenze reali $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con coefficienti $a_n \in \mathbb{R}$ e variabile $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.9 (**Criterio del rapporto**) *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie di potenze e sia* $a_n \neq 0$ *per ogni n; se esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$$

allora il raggio di convergenza R è dato da

$$R = \begin{cases} 0 & \textit{se } \ell = +\infty\,, \\ \dfrac{1}{\ell} & \textit{se } 0 < \ell < +\infty\,, \\ +\infty & \textit{se } \ell = 0\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

□

Teorema 3.10 (**Criterio della radice**) *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie di potenze e supponiamo che esista*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell\,.$$

Allora il raggio di convergenza R è dato dalla (3.3). □

Esempi 3.11 a) Calcoliamo il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. Utilizziamo il Criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1}\,;$$

quindi $R = \mathrm{e}$.

b) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. Applicando il Criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty\,;$$

pertanto $R = 0$. □

Il nostro interesse verso le serie di potenze deriva dal loro comportamento come funzioni. Come abbiamo già detto, una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con raggio di convergenza $R \neq 0$, converge per $|z| < R$ e quindi ivi definisce una funzione $f(z)$. Mostreremo che f è analitica in tale disco. L'idea è dimostrare che la derivazione termine a termine è legittima. Iniziamo con il seguente risultato tecnico.

Lemma 3.12 *Le due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza.

Dimostrazione. Verifichiamo dapprima che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente in $|z| < R$ $(R \neq 0)$, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ivi converge assolutamente. Fissato z con $0 < |z| < R$ e scelto ρ tale che $|z| < \rho < R$, si ha

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{n}{|z|} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n |a_n \rho^n| .$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n$ converge (si ricordi l'Esempio 3.8 a) e che $|z| < \rho$), dunque $\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n = 0$ e pertanto esiste una costante $M \geq 0$ tale che $n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \leq M$, per ogni n. In definitiva,

$$|n a_n z^{n-1}| \leq \frac{M}{|z|} |a_n \rho^n|$$

e, per il Criterio del confronto per serie numeriche, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge assolutamente.
Viceversa, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge assolutamente in $|z| < R$, per ogni $z \neq 0$, risulta

$$|a_n z^n| \leq \frac{1}{|z|} |n a_n z^{n-1}|$$

e dunque anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge assolutamente in $|z| < R$. $\square$

Teorema 3.13 *Una serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *con raggio di convergenza* $R > 0$, *rappresenta una funzione* $f(z)$ *analitica nel disco* $\{|z| < R\}$.

Dimostrazione. Per $|z| < R$, scriviamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = s_n(z) + r_n(z)$$

dove

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\,, \qquad r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

e

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n'(z)\,.$$

Dobbiamo verificare che $f'(z_0) = g(z_0)$ per ogni z_0 con $|z_0| < R$. Siano z e ρ tali che $|z|, |z_0| < \rho < R$; possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \left(\frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0)\right) + (s_n'(z_0) - g(z_0)) +& \\ + \left(\frac{r_n(z) - r_n(z_0)}{z - z_0}\right).& \end{aligned} \tag{3.4}$$

Inoltre, ricordando che $z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1})$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{r_n(z) - r_n(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(z^k - z_0^k\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1})\,. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza triangolare e la condizione $|z|, |z_0| < \rho$, risulta

$$\begin{aligned} &|z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}| \\ &\qquad \le |z|^{k-1} + |z|^{k-2}|z_0| + \cdots + |z||z_0|^{k-2} + |z_0|^{k-1} \le k\rho^{k-1} \end{aligned}$$

e quindi

$$\left|\frac{r_n(z) - r_n(z_0)}{z - z_0}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}\,.$$

Quest'ultima espressione è il resto di una serie convergente e tende a 0 per $n \to \infty$. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \ge n_0$,

$$\left|\frac{r_n(z) - r_n(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Inoltre, poiché $\lim_{n\to\infty} s'(z) = g(z_0)$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_1$,

$$|s'_n(z_0) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Sia $n \geq n_0, n_1$; per definizione di derivata, esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |z - z_0| < \delta$ implica

$$\left|\frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s'_n(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

In definitiva, tornando alla (3.4), si ha

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)\right| < \varepsilon$$

quando $0 < |z - z_0| < \delta$. Abbiamo dimostrato che $f'(z_0)$ esiste ed è uguale a $g(z_0)$.

Poiché il ragionamento può essere ripetuto, abbiamo in realtà dimostrato che

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \\
f'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots \\
&\ \vdots \\
f^n(z) &= n!a_n + \frac{(n+1)!}{1!}a_{n+1}z + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}z^2 + \cdots \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

In particolare, $a_n = \dfrac{f^n(0)}{n!}$ e la serie di potenze ha la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n\,. \tag{3.5}$$

3.2 Serie di Taylor

La serie (3.5) altro non è che il familiare sviluppo di Maclaurin, ma lo abbiamo ricavato nell'ipotesi che $f(z)$ abbia uno sviluppo in serie. Sappiamo che, se esiste, lo sviluppo è unico; la proprietà fondamentale, ovvero che ogni funzione analitica in un punto z_0 ammette uno sviluppo in serie di Taylor centrato in z_0 è dimostrata nel seguente risultato.

Teorema 3.14 (**Sviluppo in serie di Taylor**) *Sia f analitica in un dominio Ω. Fissato $z_0 \in \Omega$, sia $B_{r_0}(z_0)$ un intorno di z_0 contenuto in Ω. Allora per ogni $z \in B_{r_0}(z_0)$, si ha*

Figura 3.1. ?????????????????

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n \\
&= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

(ovvero la serie di potenze converge a $f(z)$ se $|z-z_0| < r_0$).

Dimostrazione. Sia $z \in B_{r_0}(z_0)$; poniamo $|z-z_0| = r < r_0$. Sia r_1 tale che $r < r_1 < r_0$ e sia s un qualunque punto sulla circonferenza C_1 di centro z_0 e raggio r_1, così $|s-z_0| = r_1$ (si veda la Figura 3.1).

Poiché f è analitica in $\{|z-z_0| \le r_1\}$, per la formula integrale di Cauchy (2.32), si ha

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,ds\,.
$$

Ma

$$
\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}\,;
$$

ricordando che

$$
\frac{1}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{n-1} + \frac{q^n}{1-q}\,,
$$

l'espressione precedente con $q = \dfrac{z-z_0}{s-z_0}$ diventa

$$
\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n-1} + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n} \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}\right).
$$

Allora

$$
\begin{aligned}
\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \cdots +& \\
+ \frac{f(s)}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1} + \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}(z-z_0)^n&\,;
\end{aligned}
$$

integriamo ora su C_1 e dividiamo per $2\pi i$, ottenendo

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z_0}\,ds + \frac{z-z_0}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}\,ds + \cdots +& \\
+ \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^n}\,ds + \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}\,ds&\,.
\end{aligned}
$$

Ricordando la (2.33), si ha

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + r_n(z) \qquad (3.7)$$

con

$$r_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds\,.$$

Per stimare $r_n(z)$, sia $M = \max_{s \in C_1} |f(s)|$ e si osservi che

$$|s - z| = |s - z_0 - (z - z_0)| \geq |s - z_0| - |z - z_0| = r_1 - r\,;$$

allora, usando la (2.26), si ha

$$|r_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi} \frac{M 2\pi r_1}{(r_1 - r) r_1^n} = \frac{M r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n .$$

Poiché $\frac{r_1}{r} < 1$, abbiamo $\lim_{n \to \infty} r_n(z) = 0$. Così per ogni punto $z \in B_{r_0}(z_0)$, il limite per $n \to \infty$ della somma dei primi n termini a secondo membro nella (3.7) è $f(z)$ e questo conclude la dimostrazione. □

Si noti che lo sviluppo (3.6) vale nel più grande disco aperto centrato in z_0 e contenuto in Ω. Il raggio di convergenza della serie di Taylor è così almeno uguale alla distanza di z_0 dalla frontiera di Ω. Naturalmente, come abbiamo visto nel Teorema 3.13, ogni serie di potenze convergente coincide con il proprio sviluppo di Taylor.

Come nel caso reale, se $z_0 = 0$ parleremo di serie o di sviluppo di Maclaurin.

Esempi 3.15 a) Consideriamo la solita serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \qquad |z| < 1\,. \qquad (3.8)$$

La funzione $f(z) = \frac{1}{1 - z}$ è analitica in $|z| < 1$, il suo sviluppo di Maclaurin è $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, da cui si ricava inoltre $f^{(n)}(0) = n!$.

b) Sia $f(z) = \mathrm{e}^z$ e $z_0 = 0$. Ricordando che tutte le sue derivate coincidono con e^z, abbiamo $f^{(n)}(0) = 1$ per ogni $n \geq 0$. Pertanto, lo sviluppo in serie di Maclaurin della funzione è

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (3.9)$$

e, come abbiamo già visto nell'Esempio 3.8 b), il raggio di convergenza di tale serie è $R = +\infty$; quindi l'uguaglianza vale per ogni $z \in \mathbb{C}$.

c) Procedendo come nel punto precedente, si ha che le funzioni trigonometriche $\sin z$ e $\cos z$ e le funzioni iperboliche $\sinh z$ e $\cosh z$ ammettono i seguenti sviluppi di Maclaurin con raggio di convergenza $R = +\infty$:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad & \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad & \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3 Serie di Laurent

In molte applicazioni si incontrano funzioni che non sono analitiche in qualche punto o in qualche sottoinsieme del piano complesso. Di conseguenza esse non ammettono sviluppi in serie di Taylor nell'intorno di tali punti. Ciononostante è possibile costruire rappresentazioni in serie di potenze, centrate in un punto di non analiticità z_0, contenenti potenze sia positive sia negative di $(z - z_0)$. In effetti, la decomposizione in serie di Laurent permette di rappresentare una funzione analitica in un anello $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ (con $0 \le r_1 < r_2$) come la somma di una funzione analitica nell'anello e di una analitica all'esterno. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 3.16 *Sia f analitica nell'anello $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ con $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 \le r_1 < r_2$. Allora per ogni $z \in \Omega$, si ha*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.11}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, ds \tag{3.12}$$

e C è il cammino, percorso in senso antiorario, il cui sostegno è la circonferenza $\{s \in \mathbb{C} : |s - z_0| = r\}$ con $r_1 < r < r_2$.

Dimostrazione. Fissato $z \in \Omega$ e posto $|z - z_0| = r$, sia $t > 0$ tale che $r_1 < t < r < r_2$ e indichiamo con C_t il cammino, percorso in senso antiorario, il cui sostegno è la circonferenza $\{|z - z_0| = t\}$. Allora, ricordando l'Osservazione 2.40, la formula integrale di Cauchy diventa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - z} \, ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{f(s)}{s - z} \, ds \,. \tag{3.13}$$

Come nella dimostrazione del Teorema 3.14, nel primo integrale scriviamo

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \cdots + \\ + \frac{f(s)}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1} + \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}(z-z_0)^n \,.$$

Per il secondo integrale della (3.13), notiamo che

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{s-z_0}{z-z_0}}$$

e otteniamo l'identità

$$-\frac{f(s)}{s-z} = f(s)\frac{1}{z-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-1}}\frac{1}{(z-z_0)^2} + \cdots + \\ + \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\frac{1}{(z-z_0)^n} + \frac{(s-z_0)^n f(s)}{(z-s)}\frac{1}{(z-z_0)^n} \,.$$

Poiché le funzioni $f(s)/(s-z_0)^{k+1}$ con $k=-n,\dots,n$ sono analitiche nella regione $\{t \le |z-z_0| \le r\}$, l'integrale sul cammino C coincide quello sul cammino C_t.

Tornando alla (3.13), si ha

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k (z-z_0)^k + r_n(z) + q_n(z)$$

con c_k, $k=-n,\dots,n$, dati dalla formula (3.12) e

$$r_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}\,ds$$

$$q_n(z) = \frac{1}{2\pi i (z-z_0)^n}\int_{C_t} \frac{(s-z_0)^n f(s)}{z-s}\,ds \,.$$

La dimostrazione del fatto che $r_n(z) \to 0$ quando $n \to +\infty$ è identica a quella vista nel Teorema 3.14. Analogamente, per stimare $q_n(z)$, sia $M = \max\limits_{s\in C_t}|f(s)|$, allora

$$|z-s| = |z-z_0-(s-z_0)| \ge |z-z_0| - |s-z_0| = r-t$$

e

$$|q_n(z)| \le \frac{1}{2\pi r^n}\frac{t^n M 2\pi t}{r-t} = \frac{Mt}{r-t}\left(\frac{t}{r}\right)^n \,.$$

Poiché $t<r$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(z) = 0$ e il teorema è dimostrato. □

La serie (3.11) è detta **serie di Laurent**. Si osservi che se f è analitica in $\{|z-z_0| < r_2\}$ eccetto che nel punto z_0, il raggio r_1 può essere scelto arbitrariamente piccolo e lo sviluppo vale per $0 < |z-z_0| < r_2$. Se f è analitica in tutto il disco $\{|z-z_0| < r_2\}$, per $n+1 \le 0$ anche la funzione $f(z)/(z-z_0)^{n+1}$ lo è. Dunque tutti i coefficienti c_n con n intero negativo sono nulli e lo sviluppo si riduce allo sviluppo di Taylor. Infine, non è difficile verificare che la serie di Laurent converge uniformemente in ogni sottoanello $\{t \le |z-z_0| \le r\}$ con $r_1 < t \le r < r_2$.

Esempi 3.17 a) Consideriamo la funzione $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ e cerchiamo lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ valido nelle regioni

$$A = \{z : |z| < 1\}, \qquad B = \{z : 1 < |z| < 2\}, \qquad C = \{z : |z| > 2\}.$$

Osserviamo che

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

e utilizziamo lo sviluppo della serie geometrica (3.8). Se consideriamo $z \in A$, risulta

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

e la funzione, analitica in A, ammette uno sviluppo in serie di Maclaurin con $c_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \geq 0$.
Sia ora $z \in B$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{z^n}, \end{aligned}$$

quindi la funzione ha uno sviluppo in serie di Laurent con coefficienti

$$c_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{2^{n+1}} & n \geq 0 \\ -1 & n < 0. \end{cases}$$

Infine, se $z \in C$, avremo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n. \end{aligned}$$

La funzione ha dunque un o sviluppo in serie di Laurent valido per $z \in C$, con $c_n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$ per $n < 0$ e $c_n = 0$ per $n \geq 0$.

b) Sia $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$. Per trovare lo sviluppo in $|z| > 0$, centrato in $z_0 = 0$, utilizziamo la (3.9), ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{z^2}e^z = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$$

con

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+2)!} & n \geq -2 \\ 0 & n < -2 \,. \end{cases}$$

c) Sia $f(z) = \dfrac{z-1}{z}$ e individuiamone lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 1$ valido nella regione $|z-1| < 1$. Consideriamo la sostituzione $w = z - 1$ e la funzione $g(z) = \frac{1}{z}$. Allora a $z_0 = 1$ corrisponde $w_0 = 0$ e possiamo scrivere

$$g(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{w+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \,.$$

Pertanto

$$f(z) = (z-1)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^n$$

e lo sviluppo è in realtà uno sviluppo in serie di Taylor.
Se consideriamo ora la regione $\{|z-1| > 1\}$ e procediamo come sopra, avremo

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{w+1} = \frac{1}{w} \frac{1}{1+1/w} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} \end{aligned}$$

e dunque

$$f(z) = (z-1)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}$$

con

$$c_n = \begin{cases} (-1)^n & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \,. \end{cases}$$

3.4 Singolarità isolate

Sia f una funzione analitica in z_0, allora esiste un intorno $B_{r_0}(z_0)$ all'interno del quale f può essere rappresentata dalla sua serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \,, \qquad |z - z_0| < r_0 \,.$$

Se z_0 è uno zero di f, allora $c_0 = 0$; se, inoltre,

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \,,$$

allora z_0 è detto **zero di ordine** m e

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+m}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m g(z)\,, \quad |z - z_0| < r_0\,,\, c_m \neq 0\,.$$

Si osservi che $g(z_0) \neq 0$ ed essendo la funzione g continua in z_0, ne segue che è non nulla in tutto un intorno di z_0. Vale quindi il seguente risultato.

Teorema 3.18 *Sia f analitica in un punto z_0 che è uno zero per f. Allora esiste un intorno di z_0 in cui z_0 è l'unico zero di f a meno che f non sia identicamente nulla. Ossia, gli zeri di una funzione analitica (non nulla) sono isolati.*

Definizione 3.19 *Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è detto* **singolarità isolata** *per f se esiste un intorno di z_0 in cui f è analitica eccetto il punto z_0.*

Pertanto se $z_0 \in \mathbb{C}$ è una singolarità isolata per f, esiste $r > 0$ tale che f è analitica in $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$. Dunque, per ogni $z \in \Omega$, f può essere rappresentata dalla serie di Laurent

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

La parte di serie contenente le potenze negative di $z - z_0$ è detta **parte principale** di f in z_0. Utilizzeremo la parte principale per classificare il tipo di singolarità isolata di f in z_0.

Definizione 3.20 *Se la parte principale di f in z_0, singolarità isolata per f, contiene almeno un termine non nullo ma il numero di tali termini è finito, z_0 si dice* **polo** *per f. Più precisamente, se esiste un intero non nullo m tale che $c_{-m} \neq 0$ e $c_{-m-1} = c_{-m-2} = \cdots = 0$, ossia*

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

il **polo** *si dice* **di ordine** *m. In particolare, se $m = 1$, parleremo di* **polo semplice** *e se $m = 2$ di* **polo doppio**.

Ragionando come nel caso di uno zero, possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m+n}(z - z_0)^n = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}\,, \qquad |z - z_0| < r\,,\, c_{-m} \neq 0$$

dove g è una funzione analitica e non nulla in un intorno di z_0.

Definizione 3.21 *Se la parte principale di f in z_0 contiene un numero infinito di termini, allora il punto z_0 è detto* **punto di singolarità essenziale**.

Esempi 3.22 i) Consideriamo la funzione $f(z) = z \sinh z$ e scriviamone la serie di Maclaurin

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^2 + \frac{1}{3!} z^4 + \dots$$

Dunque $z_0 = 0$ è uno zero per f di ordine 2.

ii) Sia $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2}$. Lo sviluppo di Laurent di f centrato in $z_0 = 0$ ha la forma

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(z - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{3!} z - \frac{1}{5!} z^3 + \dots$$

Dunque $z_0 = 0$ è uno zero per f (singolarità apparente) di ordine 1.

iii) Consideriamo $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z^3}$ in $z_0 = 0$. Risulta

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n z^n}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{\pi}{z^2} + \frac{\pi^2}{2z} + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} z + \dots$$

e quindi $z_0 = 0$ è un polo per f di ordine 3.
Il risultato si poteva anche ottenere direttamente dall'espressione di f, senza ricorrere agli sviluppi di Laurent, osservando che $f(z) = \dfrac{g(z)}{z^3}$ con $g(z) = e^{\pi z}$, analitica e non nulla in $z_0 = 0$.

iv) Sia $f(z) = \cos \frac{1}{z}$. In $z_0 = 0$, si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, z^{2n}} .$$

Così $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f.

3.5 Residui e loro calcolo

Definizione 3.23 *Sia z_0 una singolarità isolata per f e sia $r > 0$ tale che*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n , \qquad 0 < |z - z_0| < r .$$

Allora il coefficiente c_{-1} è detto **residuo** *di f in z_0 e indicato con $c_{-1} = \mathcal{R}e_f(z_0)$.*

Figura 3.2. ?????????????????

Ricordiamo che
$$\mathcal{R}e_f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$
dove C è un cammino chiuso il cui sostegno, ad esempio, coincide con la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Teorema 3.24 (**dei residui**) *Sia C un cammino chiuso e semplice all'interno del quale e sul quale una funzione f è analitica eccetto che per un numero finito di punti singolari $z_1, z_2, \ldots, z_n$ appartenenti all'interno di C. Allora*
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}e_f(z_k)\,.$$

Dimostrazione. Sia Ω l'interno di C; poiché $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \Omega$, è possibile trovare n intorni $B_{r_k}(z_k)$ disgiunti a due a due e interamente contenuti in Ω. Siano $C_1, \ldots, C_n$ i cammini i cui sostegni sono le circonferenze $\{z \in \Omega : |z - z_k| = r_k\} = \partial B_{r_k}(z_k)$ (si veda la Figura 3.2). La frontiera del dominio con bordo $\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_{r_k}(z_k)$ è il sostegno di un cammino C_0 al quale possiamo applicare il Teorema 2.32 e ottenere
$$\int_{C_0} f(z)\,dz = 0\,.$$
Ma
$$\begin{aligned} 0 = \int_{C_0} f(z)\,dz &= \int_C f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz \\ &= \int_C f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}e_f(z_k) \end{aligned}$$
e dunque il teorema è dimostrato. □

Osservazione 3.25 Si noti che il teorema dei residui permette di trasformare un integrale lungo un cammino generico in una somma di integrali lungo circonferenze.
□

Esempi 3.26 i) Si voglia calcolare
$$\int_C \frac{z}{z^2 - 1}\,dz$$

dove C è il cammino il cui sostegno è la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$. Poiché $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ è analitica in $\Omega =$ interno di C tranne che nei punti $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$, per il Teorema dei residui, risulta

$$\int_C \frac{z}{z^2-1}\, dz = 2\pi i \left(\mathcal{R}e_f(z_1) + \mathcal{R}e_f(z_2)\right) .$$

Ma

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} + \frac{1/2}{z+1}$$

e dunque $\mathcal{R}e_f(z_1) = \mathcal{R}e_f(z_2) = \frac{1}{2}$. In conclusione, l'integrale vale $2\pi i$.

ii) Si voglia calcolare

$$\int_C \mathrm{e}^{1/z}\, dz$$

dove C è il cammino il cui sostegno è la frontiera del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. La funzione $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ tranne l'origine; pertanto

$$\int_C \mathrm{e}^{1/z}\, dz = 2\pi i \mathcal{R}e_f(0) .$$

Poiché

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

risulta $c_1 = \mathcal{R}e_f(0) = 1$; dunque l'integrale cercato vale $2\pi i$. □

3.5.1 Calcolo dei residui

Poli semplici

Sia z_0 un polo semplice per f, allora

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots = \frac{g(z)}{z - z_0} , \qquad 0 < |z - z_0| < r$$

per cui risulta

$$\mathcal{R}e_f(z_0) = c_{-1} = g(z_0)$$

o, anche, osservando che $g(z) = (z - z_0)f(z)$,

$$\mathcal{R}e_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) .$$

Più in generale, sia $f(z) = \dfrac{n(z)}{d(z)}$, con $n(z_0) \neq 0$ e z_0 zero di ordine 1 per $d(z)$, ossia $d(z_0) = 0$ ma $d'(z_0) \neq 0$. Allora si ha

$$\mathcal{R}e_f(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)} .$$

Infatti

$$\mathcal{R}e_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{n(z)}{d(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{d(z) - d(z_0)}\, n(z) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)} .$$

Poli multipli

Sia z_0 un polo di ordine m per f, allora

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

con

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m_1} + \cdots$$

Si ha

$$\mathcal{R}e_f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)\,.$$

3.6 Esercizi

1. *Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni:*

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

2. *Verificare che:*

   a) $\displaystyle\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$ per $0 < |z| < 4$

   b) $\displaystyle\frac{\sin z^2}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots$ per $z \neq 0$

3. *Calcolare lo sviluppo di Taylor di:*

   a) $f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ in $z_0 = 2$

   b) $f(z) = z\,e^{2z}$ in $z_0 = -1$

   c) $f(z) = (z^2+1)\cos 3z^3$ in $z_0 = 0$

4. *Calcolare lo sviluppo di Laurent in* $z_0 = 0$ *delle seguenti funzioni nelle regioni indicate:*

   a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ in $|z| < 1$ e in $|z| > 1$

   b) $f(z) = \dfrac{\cos 2z^2}{z^5}$ in $|z| > 0$

   c) $f(z) = \dfrac{6iz^2}{z^2+9}$ in $|z| < 3$ e in $|z| > 3$

   d) $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$ in $|z-1| < 2$

5. *Verificare che* $z_0 = 0$ *è una singolarità essenziale per* $f(z) = \cosh \dfrac{1}{z}$.

6. *Classificare le singolarità di*

$$f(z) = \frac{\cos z \cosh z}{z^3\left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\left(z^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)}\,.$$

7. *Determinare le singolarità e calcolare i residui delle seguenti funzioni:*

a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$ b) $f(z) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2z}}{z^4}$

c) $f(z) = z\,\cos\dfrac{1}{z}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{3 + 2iz}$

8. *Calcolare:*

a) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(z-1)^2}\,dz$ $C = \{|z| = 2\}$

b) $\displaystyle\int_C \mathrm{e}^{1/z^2}\,dz$ $C = \{|z| = 1\}$

c) $\displaystyle\int_C \frac{5z - 2}{z(z-1)}\,dz$ $C = \{|z| = 3\}$

d) $\displaystyle\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$ $C = \{|z - 2| = 2\}$ oppure $C = \{|z| = 4\}$

3.6.1 Soluzioni

1. *Insiemi di convergenza:*

a) $\mathbb{C}$; b) $\{|z| \le 1\}$; c) $\{0\}$.

3. *Sviluppi di Taylor:*

a) $f(z) = 2 + 4(z-2) + 3(z-2)^2 + (z-2)^3$;

b) $f(z) = -\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n!} 2^n (z+1)^n$;

c) $f(z) = 1 + z^2 - \dfrac{9}{2}z^6 - \dfrac{9}{2}z^8 + \dfrac{81}{4!}z^{12} + \dfrac{81}{4!}z^{14} - \cdots$.

4. *Sviluppi di Laurent:*

a) $f(z) = 1 - 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ in $\{|z| < 1\}$; e $f(z) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ in $\{|z| > 1\}$;

b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{4n-5}}{(2n)!}$;

c) $f(z) = 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{9^{n+1}}$ in $\{|z| < 3\}$; e $f(z) = 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n}}$ in $\{|z| > 3\}$;

d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1}} z^n$ se $|z| < 1$ mentre $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ se $|z| > 1$ e $|z-1| < 2$.

6. $z = 0$ polo del terzo ordine; $z = \pm\frac{\pi}{2}$ poli semplici; $z = \pm\frac{\pi}{2} i$ sono punti di singolarità eliminabili.

7. *Singolarità e residui:*

a) $\mathcal{R}e_f(0) = -\frac{1}{2}$; $\mathcal{R}e_f(2) = \frac{3}{2}$; b) $\mathcal{R}e_f(0) = -\frac{4}{3}$;

c) $\mathcal{R}e_f(0) = -\frac{1}{2}$; d) $\mathcal{R}e_f(\frac{3}{2} i) = -\frac{i}{2}$.

8. *Integrali:*

a) $-\frac{2\pi i}{\mathrm{e}}$; b) 0 ; c) $10\pi i$; d) πi e $-2\pi^2 + \frac{23}{10}\pi i$.