

F. FAGNANI, A. TABACCO E P. TILLI

# Introduzione all'Analisi Complessa e Teoria delle distribuzioni

8 marzo 2006

Versione 8 marzo

## Funzioni analitiche

### 2.1 Derivabilità

Così come per le funzioni di variabile reale, anche per le funzioni di variabile complessa si può introdurre il concetto di derivata in un punto, ottenuta come limite dei rapporti incrementali della funzione, nel punto considerato.

**Definizione 2.1** Sia  $f$  una funzione a valori complessi, definita in un intorno di  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Essa si dice **derivabile in**  $z_0$ , e la sua derivata si indica  $f'(z_0)$ , se esiste finito il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.1)$$

Altri simboli spesso usati per indicare la derivata in  $z_0$  sono  $\frac{df}{dz}(z_0)$ ,  $Df(z_0)$ .

Posto  $\Delta z = z - z_0$ , la (2.1) si può riscrivere nella forma

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (2.2)$$

È immediato verificare che se una funzione è derivabile in un punto  $z_0$  allora è ivi anche continua. Infatti

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

ovvero  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

**Esempi 2.2** a) Una funzione costante è derivabile in ogni punto, e la sua derivata è identicamente nulla. Infatti, i suoi rapporti incrementali sono identicamente nulli ed è quindi nullo anche il loro limite.

- b) La funzione  $f(z) = z$  è derivabile in ogni punto, e si ha  $f'(z_0) = 1$  per ogni  $z_0$ .  
Infatti si ha

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = 1.$$

- c) Consideriamo  $f(z) = z^2$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ ; usando la (2.2), si ha

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0.$$

Pertanto  $f'(z_0) = 2z_0$ .

- d) Sia  $f(z) = |z|^2$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$ ; risulta

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)\overline{(z_0 + \Delta z)} - z_0\overline{z_0}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0\overline{\Delta z} + \overline{z_0}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \right). \end{aligned}$$

Se  $z_0 = 0$ , si ha  $f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z} = 0$ ; mentre se  $z_0 \neq 0$ , il limite non esiste. Infatti, avvicinandosi a  $z_0$  lungo direzioni differenti si ottengono valori diversi; ad esempio, se  $\Delta z \rightarrow 0$  lungo l'asse reale, allora  $\overline{\Delta z} = \Delta z$  e

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \right) = z_0 + \overline{z_0},$$

mentre se  $\Delta z \rightarrow 0$  lungo l'asse immaginario,  $\overline{\Delta z} = -\Delta z$  e

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \right) = \overline{z_0} - z_0.$$

In conclusione, la funzione  $f(z) = |z|^2$  è derivabile solo in  $z_0 = 0$ .  $\square$

**Definizione 2.3** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un insieme aperto non vuoto, e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione a valori complessi. Se  $f$  è derivabile in ogni punto  $z_0 \in \Omega$ , si dice che  $f$  è **analitica** o **olomorfa** in  $\Omega$ .

Infine, una funzione  $f$  si dice **intera** se è olomorfa in tutto il piano complesso.

Per le funzioni prima considerate, possiamo affermare ad esempio che le funzioni  $f(z) = z$  e  $f(z) = z^2$  sono funzioni intere, mentre la funzione  $f(z) = |z|^2$  non è analitica in alcun insieme aperto, in quanto la sua derivata esiste soltanto nel punto  $z = 0$ .

Si osservi che la definizione di derivata è formalmente identica a quella introdotta per funzioni reali di variabile reale. In effetti, le regole di derivazione e le derivate di funzioni elementari sono del tutto analoghe a quelle delle funzioni di variabile reale. Con tecniche del tutto analoghe a quelle di variabile reale, è possibile dimostrare che valgono i seguenti risultati.

**Teorema 2.4** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni derivabili in un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Allora sono ivi derivabili le funzioni somma  $f(z) + g(z)$ , la funzione prodotto  $f(z)g(z)$  e, se  $g(z_0) \neq 0$ , anche la funzione quoziente  $\frac{f(z)}{g(z)}$ . Inoltre si ha

$$\begin{aligned}(f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.\end{aligned}$$

**Teorema 2.5** Sia  $f(z)$  una funzione derivabile in un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Sia poi  $g(w)$  una funzione derivabile nel punto  $w_0 = f(z_0)$ . Allora la funzione composta  $g \circ f(z) = g(f(z))$  è derivabile in  $z_0$  e si ha

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

**Esempi 2.6** i) Abbiamo già verificato nell'Esempio 2.2 che le funzioni costanti, la funzione  $f(z) = z$  e la funzione  $f(z) = z^2$  sono funzioni olomorfe, anzi sono funzioni intere. Applicando ora il Teorema 2.4 con  $f(z) = z$  e  $g(z) = z^2$ , si deduce che anche la funzione prodotto  $h(z) = z^3$  è intera e la sua derivata è la funzione  $h'(z) = 3z^2$ . Più in generale (scegliendo ad esempio  $f(z) = z$  e  $g(z) = z^3$ , ecc.) e procedendo per induzione, si deduce che ogni monomio, cioè ogni funzione del tipo  $h(z) = z^n$ ,  $n$  intero positivo, è una funzione intera, e la sua derivata è la funzione  $h'(z) = nz^{n-1}$ .

ii) Sempre dal Teorema 2.4, segue che una combinazione lineare di funzioni olomorfe è olomorfa, quindi in particolare ogni polinomio a coefficienti complessi

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

è una funzione intera, e vale l'usuale regola di derivazione dei polinomi

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1}.$$

iii) Dal punto precedente e dal Teorema 2.4 segue quindi che una qualsiasi funzione razionale, cioè una funzione del tipo

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_mz^m},$$

è una funzione olomorfa nel suo dominio di definizione, cioè in tutto  $\mathbb{C}$  tranne i punti nei quali si annulla il polinomio  $Q(z)$ .  $\square$

Anche la funzione esponenziale  $f(z) = e^z$  e le altre funzioni elementari da essa derivanti (introdotte nel capitolo precedente) risultano essere derivabili nel loro dominio, e restano valide le usuali regole di derivazioni, ad esempio

$$\begin{aligned}
D e^z &= e^z \\
D \sin z &= \cos z & D \cos z &= -\sin z \\
D \sinh z &= \cosh z & D \cosh z &= \sinh z.
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

Tutto questo, in linea di principio, si può dimostrare direttamente facendo ricorso alla definizione di derivabilità data all'inizio di questo paragrafo; tuttavia, queste verifiche dirette risulterebbero piuttosto laboriose. Vedremo nel paragrafo successivo che in realtà esiste un importante criterio (condizioni di Cauchy-Riemann) che consente di verificare che una data funzione è olomorfa, senza ricorrere direttamente alla definizione di derivata complessa.

## 2.2 Condizioni di Cauchy-Riemann

Supponiamo che una funzione  $f$  sia definita in un insieme aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dall'equazione

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \in \Omega,$$

dove le due funzioni reali  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria della funzione  $f$ .

In questo paragrafo studieremo condizioni necessarie e sufficienti sulle funzioni  $u$  e  $v$ , affinché la funzione  $f$  risulti olomorfa nell'aperto  $\Omega$ .

**Teorema 2.7** *Sia  $\Omega$  un insieme aperto del piano complesso, e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione a valori complessi. Allora, indicando con  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  la parte reale e la parte immaginaria di  $f$ , le due condizioni seguenti sono tra loro equivalenti:*

1. *La funzione  $f$  è olomorfa in  $\Omega$ .*
2. *Le due funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono di classe  $C^1$  in  $\Omega$  (cioè hanno derivate parziali prime continue in  $\Omega$ ) e verificano le condizioni di Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{cases}
\tag{2.4}$$

*in ogni punto  $(x_0, y_0) \in \Omega$ .*

*Inoltre, se  $f$  è olomorfa la derivata complessa si esprime in funzione delle derivate parziali di  $u$  e  $v$  come*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \tag{2.5}$$

**Dimostrazione.** Iniziamo con l'implicazione  $1. \Rightarrow 2.$  L'idea della dimostrazione consiste nel calcolare il limite (2.2) in due modi: prima lungo l'asse reale (cioè considerando incrementi reali  $\Delta z = \Delta x$ ) e poi lungo l'asse immaginario (cioè

considerando incrementi immaginari puri, del tipo  $\Delta z = i\Delta y$ . Ad esempio, preso un punto  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$  e un incremento reale  $\Delta z = \Delta x$ , si ha

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

e, facendo tendere a zero l'incremento  $\Delta z = \Delta x$ , si trova

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (2.6)$$

(si noti che il limite a primo membro, cioè  $f'(z_0)$ , esiste per ipotesi e quindi, per il Teorema 1.4, esistono anche i corrispondenti limiti della parte reale e della parte immaginaria presenti a membro destro, cioè le derivate parziali  $u_x$  e  $v_x$ ). Analogamente, con incrementi immaginari puri  $\Delta z = i\Delta y$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= -i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

e quindi passando al limite si trova

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Confrontando con la (2.6) si trova la (2.5), e le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) seguono dalla (2.5), uguagliando parte reale e parte immaginaria delle due espressioni. Non dimostriamo qui la continuità delle derivate parziali di  $u$  e  $v$ , che seguirà dai risultati più generali dei paragrafi successivi.

Veniamo ora all'implicazione  $2. \Rightarrow 1.$ , e supponiamo quindi che  $u$  e  $v$  siano di classe  $C^1$  (e quindi differenziabili). Preso un punto  $(x_0, y_0)$ , poniamo per semplicità

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad D = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

e consideriamo gli sviluppi di Taylor al primo ordine

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0 + k) &= u(x_0, y_0) + Ah + Bk + \varepsilon_1(h, k) \\ v(x_0 + h, y_0 + k) &= v(x_0, y_0) + Ch + Dk + \varepsilon_2(h, k), \end{aligned}$$

dove gli "errori"  $\varepsilon_1(h, k)$  e  $\varepsilon_2(h, k)$  sono infinitesimi di ordine superiore a  $\sqrt{h^2 + k^2}$  per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , ovvero

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\varepsilon_1(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\varepsilon_2(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (2.7)$$

Pertanto, considerando l'incremento complesso  $\Delta z = h + ik$ , si ha che

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = Ah + Bk + \varepsilon_1(h, k) + i(Ch + Dk + \varepsilon_2(h, k)).$$

D'altra parte, si ha  $A = D$  e  $B = -C$  grazie alle condizioni di Cauchy–Riemann (2.4), quindi eliminando  $D$  e  $B$  si ottiene

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= A(h + ik) + C(ih - k) + \varepsilon_1(h, k) + i\varepsilon_2(h, k) \\ &= A(h + ik) + iC(h + ik) + \varepsilon_1(h, k) + i\varepsilon_2(h, k) \\ &= (A + iC)\Delta z + \varepsilon_1(h, k) + i\varepsilon_2(h, k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Poiché  $|\Delta z| = \sqrt{h^2 + k^2}$ , grazie alla (2.7) il termine  $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $\Delta z$ , quando  $\Delta z$  tende a zero. Pertanto, dividendo per  $\Delta z$  nella (2.8) e passando al limite, si ottiene che  $f'(z_0)$  esiste e coincide con  $A + iC$  (quindi anche con  $D - iB$ ), dimostrando così la derivabilità nel punto  $z_0$  e la validità della (2.5).  $\square$

L'uso che si può fare del Teorema 2.7 è duplice. Da un lato, esso offre un comodo criterio per verificare che una data funzione è olomorfa: è sufficiente verificare che parte reale e parte immaginaria siano di classe  $C^1$  e soddisfino le condizioni di Cauchy–Riemann (2.4) (si vedano gli esempi successivi). Dall'altro, se sappiamo già che una certa funzione  $f(z)$  è olomorfa, allora in base al teorema sappiamo che sono automaticamente verificate le condizioni di Cauchy–Riemann (2.4): come vedremo nel capitolo successivo, da questo potremo ricavare numerose proprietà delle funzioni olomorfe.

**Esempio 2.8** Verifichiamo che  $f(z) = e^z$  è una funzione intera. Ricordiamo che, ponendo  $z = x + iy$ , si ha per definizione

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

e dunque le parti reale e immaginaria di  $e^z$  sono le due funzioni

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

È chiaro che si tratta di funzioni di classe  $C^1$  (anzi,  $C^\infty$ ) e che

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos y, \end{aligned}$$

quindi le condizioni di Cauchy–Riemann (2.4) sono soddisfatte in tutto il piano complesso. Pertanto, applicando il Teorema 2.7 otteniamo che la funzione  $f(z) = e^z$  è analitica in tutto il piano complesso, ovvero è una funzione intera.

Inoltre, dalla (2.5) si ottiene

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

(cioè la derivata della funzione esponenziale è la funzione esponenziale stessa, in accordo con quanto avviene in ambito reale).  $\square$

**Osservazione 2.9** Avendo dimostrato che la funzione esponenziale è olomorfa, si ottiene che anche le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche, definite nelle (1.22), (1.28), sono funzioni intere. Inoltre, sempre usando le (1.22), (1.28), si ottengono le formule (2.3) per il calcolo delle derivate.  $\square$

**Esempio 2.10** Nell'Esempio 2.2 abbiamo dimostrato che la funzione  $f(z) = |z|^2$  non è olomorfa in alcun insieme aperto, verificando direttamente che essa è derivabile soltanto nell'origine.

Alla stessa conclusione si può giungere applicando il Teorema 2.7, nel modo seguente. La funzione  $f(z) = |z|^2$  assume soltanto valori reali, quindi la sua parte immaginaria è la funzione identicamente nulla  $v(x, y) = 0$ , mentre la parte reale è la funzione  $u(x, y) = x^2 + y^2$ . Le derivate parziali sono date da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

quindi le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte soltanto nel punto  $(0, 0)$ . In altre parole, non esiste alcun insieme aperto  $\Omega$  (non vuoto!) nel quale siano soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann, e la funzione non può quindi essere olomorfa, in nessun insieme aperto.  $\square$

**Osservazione 2.11** La condizione 2. del Teorema 2.7 richiede la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann in un insieme aperto, assieme alla continuità delle derivate parziali prime. In effetti, la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann in un singolo punto non implica necessariamente che la funzione sia derivabile in quel punto. Riesaminando la dimostrazione dell'implicazione 1.  $\Rightarrow$  2., si vede che la derivabilità in un singolo punto implica, da sola, le condizioni di Cauchy-Riemann in quello stesso punto. Più in generale, se esistono le derivate parziali di  $u$  e  $v$  nell'intorno di un punto  $(x_0, y_0)$ , sono continue e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann nel solo punto  $(x_0, y_0)$ , allora la derivata di  $f$  in  $z_0 = x_0 + iy_0$  esiste.  $\square$

**Esempio 2.12** La funzione

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) nell'origine ma non è ivi derivabile. Infatti, per  $z \neq 0$ , risulta

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2} + i \frac{y(y^2 - 3x^2)}{x^2 + y^2}$$

e dunque

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{y(y^2 - 3x^2)}{x^2 + y^2}.$$

Pertanto, per definizione di derivata parziale,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \cdot x^2} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y \cdot y^2} = 1$$

e, analogamente,  $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$ . Così le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte in  $z = 0$ . Ma la derivata in  $z = 0$ , se esistesse, sarebbe il valore del limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2}.$$

Tale limite non esiste, come si può vedere considerando le direzioni lungo l'asse reale oppure lungo la diagonale  $x = y$ ; in effetti, se  $y = 0$  e  $x \rightarrow 0$ , risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

mentre, se  $x = y$  e  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1-i)^2 x^2}{(1+i)^2 x^2} = -1. \quad \square$$

### Forma polare delle condizioni di Cauchy-Riemann

Fissato  $z_0 \neq 0$ , il Teorema 2.7 può essere riformulato utilizzando le coordinate polari anziché quelle cartesiane. Riscriviamo per tale ragione le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) in forma polare. Usiamo la trasformazione  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  e la sua inversa  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x} + \text{cost}$  (si ricordi la (1.10)) per esprimere le derivate parziali di  $u$  e  $v$  rispetto alle variabili  $r$  e  $\theta$  anziché  $x$  e  $y$ . Risulta

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

e quindi, usando la regola di derivazione in catena,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta};$$

analogamente,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Pertanto le condizioni (2.4) equivalgono a

$$\begin{cases} \cos \theta \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \sin \theta \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \cos \theta \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\sin \theta \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \end{cases}$$

Tali relazioni sono verificate solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \quad (2.9)$$

e queste corrispondono alle condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare.

Il Teorema 2.7 può quindi essere espresso in modo equivalente nella seguente forma.

**Teorema 2.13** Sia  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  definita in un intorno del punto  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ . Supponiamo che le derivate parziali di  $u$  e  $v$ , rispetto a  $r$  e  $\theta$ , esistano in tale intorno e siano continue in  $(r_0, \theta_0)$ . Allora, se sono soddisfatte le condizioni (2.9) in  $(r_0, \theta_0)$ , la derivata di  $f'(z_0)$  di  $f$  in  $z_0$  esiste e

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0} \left( \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right) = \frac{e^{-i\theta_0}}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) - i \frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \right).$$

**Dimostrazione.** L'esistenza segue per quanto detto prima. Verifichiamo che vale

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0} \left( \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right). \text{ Posto } z_0 = r_0 e^{i\theta_0} = x_0 + iy_0, \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \cos \theta_0 \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) - \frac{\sin \theta_0}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) + i \cos \theta_0 \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) - i \frac{\sin \theta_0}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \\ &= \left( \cos \theta_0 - i \sin \theta_0 \right) \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \left( \sin \theta_0 + i \cos \theta_0 \right) \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) \\ &= e^{-i\theta_0} \left( \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right). \end{aligned}$$

In modo analogo si verifica la seconda uguaglianza.  $\square$

**Esempio 2.14** Verifichiamo che la funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$  è analitica per ogni  $z \neq 0$ . Poiché

$$f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta),$$

risulta

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{r} \cos \theta, & \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) &= -\frac{\cos \theta}{r^2}, & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta}{r}, \\ v(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\sin \theta}{r^2}, & \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

Dunque le derivate parziali di  $u$  e  $v$  rispetto a  $r$  e  $\theta$  sono continue per ogni  $(r, \theta)$  con  $r > 0$  e le condizioni (2.9) sono verificate. Applicando il Teorema 2.13 otteniamo il risultato. Inoltre

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) \right) = e^{-i\theta} \left( \frac{-\cos \theta + i \sin \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{e^{-2i\theta}}{r^2} = -\frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = -\frac{1}{z^2}. \end{aligned} \quad \square$$

Nel seguito useremo la notazione  $u_x$  per indicare la derivata parziale di  $u$  rispetto a  $x$  e similmente per le altre variabili.

## 2.3 Funzioni analitiche e armoniche

Diamo innanzitutto la seguente definizione

**Definizione 2.15** Una funzione reale di due variabili reali  $h : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **funzione armonica** in  $\Omega$  se è di classe<sup>1</sup>  $\mathcal{C}^2(\Omega)$  e soddisfa in  $\Omega$  l'equazione differenziale

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \quad (2.10)$$

Tale equazione è nota in letteratura come equazione di Laplace e l'operatore

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

è detto operatore di Laplace o laplaciano. Possiamo quindi riscrivere l'equazione (2.10) nella forma

$$\Delta h(x, y) = 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega.$$

Il legame tra funzioni armoniche e funzioni analitiche è espresso dal seguente risultato.

**Teorema 2.16** Sia  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  analitica in  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Allora le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono armoniche in  $\Omega$ .

<sup>1</sup> Ricordiamo che  $h \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  significa che  $h$  ammette derivate parziali sino al secondo ordine continue in  $\Omega$ .

**Dimostrazione.** Utilizziamo un risultato che verrà dimostrato nel seguito (si veda il Paragrafo 2.7) il quale garantisce che, se una funzione di variabile complessa  $f$  è analitica, allora le funzioni parte reale  $u$  e parte immaginaria  $v$  sono di classe  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ .

Per dimostrare il teorema è sufficiente dunque verificare che le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  soddisfano l'equazione di Laplace in  $\Omega$ . In effetti, dalle condizioni di Cauchy-Riemann,  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$ , derivando entrambe le equazioni rispetto a  $x$  e a  $y$ , otteniamo

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yx} = -v_{xx} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}.$$

Per il Teorema di Schwartz<sup>2</sup> applicato alle funzioni  $u$  e  $v$ , si ha

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

e quindi  $u$  e  $v$  sono armoniche in  $\Omega$ . □

Se due funzioni  $u$  e  $v$  sono armoniche in  $\Omega$  e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in  $\Omega$ , si dice che  $v$  è una **funzione armonica coniugata di  $u$** . Chiaramente se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  è una funzione analitica in  $\Omega$ , allora  $v(x, y)$  è un'armonica coniugata di  $u$ . Viceversa, se  $v$  è un'armonica coniugata di  $u$  in  $\Omega$ , necessariamente la funzione  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  è analitica in  $\Omega$  (Teorema 2.7).

Si osservi che se  $v$  è un'armonica coniugata di  $u$  in  $\Omega$ , non è in generale vero che  $u$  è un'armonica coniugata di  $v$ . Ad esempio, si consideri

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Poiché  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = z^2$  è una funzione intera,  $v$  è un'armonica coniugata di  $u$ . Ma  $u$  non è un'armonica coniugata di  $v$  in quanto, scambiando i ruoli di  $u$  e  $v$ , non valgono le (2.4). Notiamo che se  $\Omega$  è un insieme connesso e  $u$  e  $v$  sono una la coniugata dell'altra allora necessariamente sono funzioni costanti. Infatti, se valgono contemporaneamente

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_x = u_y \\ v_y = -u_x \end{cases},$$

si ha  $u_x = -u_x$  e  $u_y = -u_y$ , ossia  $u_x = u_y = 0$ . Quindi  $u(x, y)$  è costante; analogamente si ottiene che  $v(x, y)$  è costante.

Data una funzione armonica  $u(x, y)$  in  $\Omega$  ci poniamo il problema di trovare una funzione armonica coniugata  $v(x, y)$  di  $u$  in  $\Omega$ ; ovvero ci chiediamo se sia possibile individuare una funzione analitica la cui parte reale sia assegnata. Vediamo con un esempio come si può procedere.

<sup>2</sup> **Teorema di Schwartz.** Sia  $h(x, y)$  di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ; allora le derivate parziali miste  $h_{xy}$  e  $h_{yx}$  coincidono.

**Esempio 2.17** Sia  $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ , con  $u_x(x, y) = -6xy$  e  $u_y(x, y) = 3y^2 - 3x^2$ . Dalla condizione  $u_x = v_y$ , si dovrà avere  $v_y(x, y) = -6xy$ ; possiamo concludere, integrando rispetto alla variabile  $y$ , che

$$v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x)$$

dove  $\phi(x)$  è una funzione (al momento arbitraria) della variabile  $x$ . Poiché  $v_x(x, y) = -3y^2 + \phi'(x)$ , dalla condizione  $u_y = -v_x$ , si dovrà avere

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \phi'(x).$$

Pertanto  $\phi'(x) = 3x^2$  e, integrando rispetto a  $x$ , si ha  $\phi(x) = x^3 + c$ , dove  $c$  è un'arbitraria costante. In definitiva,  $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + c$  è un'armonica coniugata di  $u$  e la funzione

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + c) = i(z^3 + c)$$

è analitica in  $\mathbb{C}$ . □

## 2.4 Richiami su archi e cammini

Come è noto dai corsi di calcolo, con il termine “curva” si indica in generale una applicazione  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $I = [a, b]$  è un intervallo della retta reale e  $\mathbb{R}^n$  è lo spazio Euclideo. L'idea intuitiva è la seguente: possiamo immaginare  $[a, b]$  come un intervallo temporale, e il valore  $\gamma(t)$  della funzione  $\gamma$  nel punto  $t$  come una posizione nello spazio Euclideo (ad esempio nel piano o nello spazio tridimensionale), cioè la “posizione al tempo  $t$ ”. In altre parole, all'istante iniziale  $t = a$  ci troviamo nel punto  $\gamma(a)$ , all'istante finale  $t = b$  ci troviamo nel punto  $\gamma(b)$  e così via, per tutti gli istanti di tempo intermedi.

Qui siamo interessati al caso di curve<sup>3</sup> nel piano, cioè ad applicazioni del tipo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , in relazione alla teoria delle funzioni di variabile complessa ed in particolare delle funzioni olomorfe. Conviene quindi identificare il piano  $\mathbb{R}^2$  col piano complesso  $\mathbb{C}$ , e dare la seguente definizione:

**Definizione 2.18** Si chiama **curva nel piano o cammino** una applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continua e di classe  $C^1$  a tratti, dove  $[a, b]$  è un intervallo limitato

<sup>3</sup> La terminologia qui adottata non è esattamente quella classica. Di solito, infatti, si definisce “curva nel piano” una applicazione  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $I$  è un qualsiasi intervallo reale, con la sola ipotesi che  $\gamma$  sia continua: viene poi specificato separatamente cosa si intende per curva regolare, o regolare a tratti, chiamando talvolta “arco” una curva regolare a tratti il cui dominio  $I$  sia un intervallo chiuso e limitato, come nel nostro caso. Per non appesantire la terminologia, qui abbiamo preferito fornire la definizione di curva in un caso particolare, limitandoci a quanto sarà necessario nel seguito.

della retta reale. Indichiamo con  $z(t)$  il punto immagine di  $t \in [a, b]$  attraverso  $\gamma$ ; l'insieme

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\},$$

cioè l'immagine dell'applicazione  $\gamma$ , viene detto **sostegno della curva**.

Come per tutte le funzioni a valori complessi, data una curva  $z(t)$  possiamo considerare la sua parte reale  $x(t)$  e la sua parte immaginaria  $y(t)$ . In altre parole, possiamo scrivere

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

dove  $x(t)$  e  $y(t)$  sono due funzioni reali, entrambe definite sull'intervallo  $[a, b]$ . È importante rimarcare che nella definizione precedente, quando si dice che  $z(t)$  è continua e  $C^1$  a tratti, si intende dire che ognuna delle due funzioni  $x(t)$  ed  $y(t)$  è continua e  $C^1$  a tratti su  $[a, b]$ . Si può allora parlare della **derivata**  $z'(t_0)$  di una curva nel punto  $t_0$ , intendendo con questo il numero complesso

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0),$$

a patto che entrambe le funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  siano derivabili nel punto  $t_0$  (si noti che questo avviene su tutto  $[a, b]$  tranne eventualmente in un numero finito di punti, avendo richiesto che  $z(t)$  sia  $C^1$  a tratti).

La richiesta che  $z(t)$  sia continua e  $C^1$  a tratti ha in parte motivazioni tecniche, mentre è essenziale comprendere la differenza tra una curva  $z(t)$  e il suo sostegno  $C$ . La curva  $z(t)$  è una *funzione* (di variabile reale e a valori complessi), mentre il suo sostegno  $C$  è un *insieme di punti* nel piano (cioè l'immagine della curva stessa). Se immaginiamo la curva come la descrizione del moto di una particella nel piano, la funzione  $z(t)$  rappresenta la legge oraria del moto, mentre il sostegno  $C$  rappresenta l'insieme di tutti i punti nei quali la particella è passata almeno una volta.

Si può anche pensare una curva  $z(t)$  come ad un modo di parametrizzare il suo sostegno  $C$ , associando ad ogni valore del parametro  $t \in [a, b]$  uno ed un solo punto del sostegno  $C$ . Tuttavia, l'insieme  $C$  può essere il sostegno di curve diverse, ovvero può essere parametrizzato in modi diversi: con un'immagine del mondo reale, si pensi a  $C$  come al tracciato di una pista automobilistica, ed a  $z(t)$  come ad uno dei tanti modi in cui questo tracciato può essere percorso (tenendo quindi conto di eventuali accelerazioni, soste, inversioni di marcia ecc.).

Ad esempio, la curva  $z(t) = t(1+i)$  con  $t \in [0, 1]$  ha come sostegno il segmento di estremi  $w_1 = 0$  e  $w_2 = 1+i$  nel piano complesso. Tale segmento è però anche il sostegno di altre curve, ad esempio della curva  $h(t) = t^2(1+i)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Le due curve costituiscono due diverse parametrizzazioni dello stesso segmento  $\overline{w_0w_1}$ . Ad esempio, il punto medio del segmento è individuato dal parametro  $t = 1/2$  nel primo caso e  $t = \sqrt{2}/2$  nel secondo.

Va tuttavia detto che frequentemente si indica con il termine “curva” o “arco” un sottoinsieme del piano (ad esempio, si parla comunemente di ‘arco di circonferenza’); in tal caso viene sottintesa una parametrizzazione dell’oggetto geometrico, solitamente definita nel modo più naturale.

Nelle applicazioni, è importante costruire curve che parametrizzano figure geometriche semplici, quali ad esempio segmenti e circonferenze.

**Esempi 2.19** i) Consideriamo due punti del piano complesso  $w_0$  e  $w_1$ , ed un intervallo reale  $[a, b]$ . Per costruire una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  che parametrizzi il segmento  $\overline{w_0 w_1}$ , possiamo porre

$$z(t) = w_0 + (t - a) \frac{w_1 - w_0}{b - a}, \quad t \in [a, b] \quad (2.11)$$

(si verifichi per esercizio che si ottiene effettivamente la parametrizzazione cercata). La formula precedente si può interpretare, da un punto di vista cinematico, nel modo seguente: si vuole andare da  $w_0$  a  $w_1$ , con un percorso rettilineo, nell'intervallo di tempo  $[a, b]$  (e quindi in un tempo totale pari a  $b - a$ ). La velocità media (identificando i vettori coi numeri complessi) è quindi data dal rapporto  $(w_1 - w_0)/(b - a)$  (spazio totale percorso, diviso tempo totale impiegato). Percorrendo il segmento con velocità costante, al tempo  $t$  ci troveremo nella posizione ottenuta sommando il vettore di partenza  $w_0$  allo spazio già percorso, cioè la velocità media  $(w_1 - w_0)/(b - a)$  per il tempo trascorso  $t - a$ . Se siamo liberi di scegliere l'intervallo  $[a, b]$ , conviene lavorare sull'intervallo unitario  $[0, 1]$ . La curva precedente allora prende la forma più semplice

$$z(t) = w_0 + (w_1 - w_0)t, \quad t \in [0, 1].$$

ii) Per parametrizzare una circonferenza di centro  $w_0$  e raggio  $R$ , con una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , basta porre

$$z(t) = w_0 + R e^{i2\pi(t-a)/(b-a)}, \quad t \in [a, b].$$

L'interpretazione cinematica è ora quella del moto circolare uniforme, con velocità angolare costante pari a  $2\pi/(b - a)$  (perché si vuole compiere un angolo giro in un tempo totale  $b - a$ ). Come prima, il termine  $t - a$  indica il tempo trascorso, all'istante  $t$ , dall'inizio del moto.

Se siamo liberi di scegliere l'intervallo di tempo  $[a, b]$ , conviene scegliere  $[a, b] = [0, 2\pi]$ , in modo da parametrizzare con velocità angolare unitaria. La curva precedente allora prende la forma più semplice

$$z(t) = w_0 + R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.12)$$

Una curva  $\gamma$  si dice **semplice** se  $\gamma$  è un'applicazione iniettiva, ossia se valori diversi del parametro individuano punti diversi del sostegno.

Inoltre, una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **chiusa** se  $z(a) = z(b)$ : si noti che, ovviamente, una curva chiusa non può essere semplice (a parte il caso degenerare in cui  $a = b$  e l'intervallo si riduce a un solo punto!).

Una nozione fondamentale nella teoria delle curve piane è quella di **curva di Jordan**. Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  si dice curva di Jordan se verifica le due condizioni seguenti:

1. È una curva chiusa, cioè  $z(a) = z(b)$ .
2. Il punto  $z(a) = z(b)$  è l'unico punto del sostegno ad essere l'immagine di due valori diversi del parametro.

Intuitivamente, una curva di Jordan è la parametrizzazione di un percorso chiuso che non passa mai una seconda volta sui punti già percorsi, tranne ovviamente per il punto finale  $z(b)$  che coincide con  $z(a)$ .

**Esempi 2.20** i) La curva

$$z(t) = 1 + \cos t + i(3 + \sin t) = 1 + 3i + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ha come sostegno la circonferenza di centro  $1 + 3i$  e raggio 1; infatti

$$(x(t) - 1)^2 + (y(t) - 3)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Si tratta quindi di una *curva di Jordan* e costituisce il modo più naturale per parametrizzare tale circonferenza percorrendola in senso antiorario, a partire dal punto  $2 + 3i$ .

Più in generale, la curva definita nella (2.12) è una curva di Jordan che ha come sostegno la circonferenza centrata nel punto  $w_0$  di raggio  $R$ .

Si osservi che, se nella (2.12) facciamo variare  $t$  in un intervallo di tipo  $[0, 2k\pi]$ , con  $k$  intero positivo  $\geq 2$ , la curva ottenuta ha ancora come sostegno la stessa circonferenza, ma questa viene ora percorsa  $k$  volte: pertanto, in questo caso non si avrebbe una curva di Jordan.

Se invece  $t$  varia nell'intervallo  $[0, \pi]$ , la corrispondente curva ha come sostegno una semicirconferenza, è semplice ma non è chiusa (e non è quindi una curva di Jordan).

- ii) Similmente, assegnati  $a, b > 0$ , la curva chiusa e semplice

$$z(t) = a \cos t + ib \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

parametrizza l'ellisse centrato nell'origine e con semiassi  $a$  e  $b$  (si verifichi che questa parametrizzazione fornisce una curva di Jordan).

- iii) La curva

$$z(t) = t \cos t + it \sin t = te^{it}, \quad t \in [0, 4\pi],$$

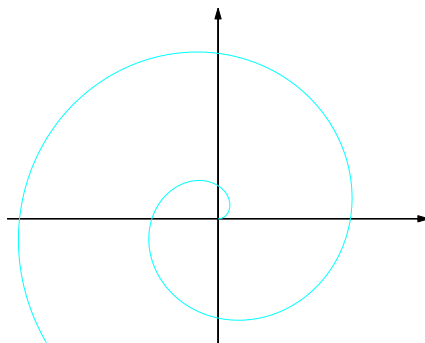
ha come sostegno la spirale parzialmente rappresentata in Figura 2.1, che viene percorsa in senso antiorario a partire dall'origine. Infatti il punto  $z(t)$  ha distanza dall'origine uguale a  $|z(t)| = t$ , che cresce al crescere di  $t$ . La curva è semplice ma non è chiusa.

- iv) La formula (2.11) fornisce una parametrizzazione del segmento di estremi  $w_0$  e  $w_1$ . La curva è semplice, ma non è una curva di Jordan.

- v) Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile con continuità sull'intervallo  $I$ ; la curva

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t \in I,$$

ovvero  $z(t) = t + if(t)$ ,  $t \in I$ , è una curva avente come sostegno il grafico della funzione  $f$ .



**Figura 2.1.** Rappresentazione della spirale definita nell'Esempio 2.20 iii)

vi) La curva  $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 1), & t \in [0, 1], \\ (t, t), & t \in [1, 2], \end{cases}$$

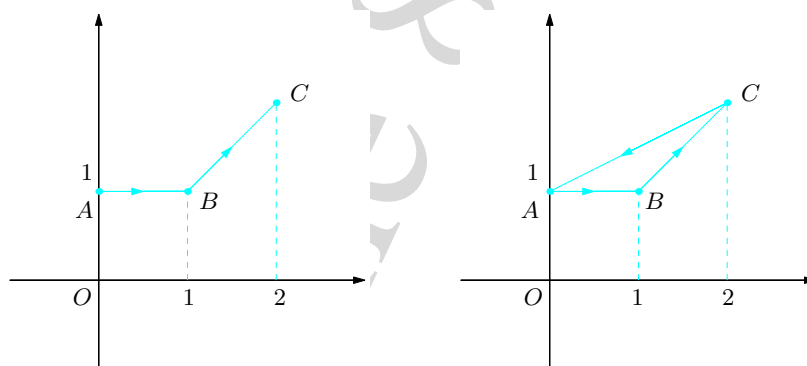
ovvero

$$z(t) = \begin{cases} t + i, & t \in [0, 1], \\ (1 + i)t, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale  $ABC$  (si veda la Figura 2.2, a sinistra);  
invece la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 1), & t \in [0, 1], \\ (t, t), & t \in [1, 2], \\ (t, 2 - \frac{1}{2}(t - 2)), & t \in [2, 4] \end{cases}$$

ovvero



**Figura 2.2.** Poligonale  $ABC$ , a sinistra e  $ABCA$ , a destra, definite nell'Esempio 2.20 vi)

$$z(t) = \begin{cases} t + i, & t \in [0, 1), \\ (1 + i)t, & t \in [1, 2], \\ t + (3 - \frac{1}{2}t)i, & t \in [2, 4], \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale  $ABCA$  (si veda la Figura 2.2, a destra). Entrambe le curve sono  $C^1$  a tratti, in particolare l'ultima poligonale è una curva di Jordan.  $\square$

Enunciamo ora un risultato intuitivamente vero, detto Teorema di Jordan, la cui dimostrazione è tutt'altro che immediata.

**Teorema 2.21** *Associati ad ogni curva di Jordan  $\gamma$  vi sono due domini ognuno dei quali ha la frontiera coincidente con il sostegno  $C$  della curva. Uno di questi domini, detto l'interno di  $\gamma$ , è limitato; l'altro, l'esterno di  $\gamma$ , è non limitato.*

## 2.5 Integrali di linea

In questo paragrafo si vuole definire l'integrale di una funzione di variabile complessa lungo un cammino.

Prima di tutto, occorre definire l'integrale di una funzione di variabile reale e a valori complessi  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Possiamo scrivere

$$g(t) = u(t) + iv(t), \quad a \leq t \leq b$$

con  $u$  e  $v$  funzioni reali che supponiamo continue a tratti in  $[a, b]$ . Definiamo quindi l'integrale di  $g$  su  $[a, b]$  come

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt. \quad (2.13)$$

In altre parole, l'integrale è un numero complesso: la sua parte reale, è l'integrale della parte reale di  $g$ , mentre la sua parte immaginaria è l'integrale della parte immaginaria di  $g$ . In formule,

$$\operatorname{Re} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt, \quad \operatorname{Im} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt.$$

Inoltre, si verifica facilmente (lo si faccia per esercizio) che

$$\int_a^b \lambda g(t) dt = \lambda \int_a^b g(t) dt, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Consideriamo ora una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , ed una funzione  $f(z)$  di *variabile complessa* e a valori complessi, che supponiamo essere continua sul sostegno  $C$  della curva.

**Definizione 2.22** Si definisce integrale di linea di  $f$  lungo  $C$  la quantità

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (2.14)$$

Si noti che, per definizione, l'integrale lungo una curva è ricondotto all'integrale, sull'intervallo reale  $[a, b]$ , della funzione  $g(t) = f(z(t))z'(t)$ , che va quindi inteso nel senso della (2.13).

Vale la pena di scrivere in modo esplicito il membro destro della (2.14). Ponendo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , si ha  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  e quindi svolgendo il prodotto si trova

$$\begin{aligned} f(z(t)) z'(t) &= u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) + \\ &+ i(v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Il secondo integrale nella (2.14) è quindi ben definito grazie alle ipotesi fatte sulla funzione  $f$ , e grazie al fatto che  $z(t)$  è (per definizione stessa di curva)  $C^1$  a tratti, quindi le funzioni  $x'(t)$  e  $y'(t)$  sono continue a tratti su  $[a, b]$ .

Inoltre, usando la (2.15), si ha

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)) dt, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)) dt. \quad (2.17)$$

Possiamo riscrivere la (2.14) come

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy), \quad (2.18)$$

espressione che può anche essere formalmente dedotta dalla (2.14) sostituendo  $f$  con  $u + iv$  e  $dz$  con  $dx + idy$ .

Per motivare la Definizione 2.22, cerchiamo di capire cosa succede se si cerca di costruire l'integrale complesso come limite di somme di Riemann. Dividiamo quindi l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  intervalli congruenti, di estremi

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad \text{dove} \quad t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n},$$

consideriamo i punti sulla curva

$$z_0 = z(t_0), \quad z_1 = z(t_1), \quad \cdots, \quad z_n = z(t_n)$$

corrispondenti agli estremi degli intervalli, e costruiamo la somma di Riemann

$$\sum_{j=1}^n f(z_j) \cdot (z_j - z_{j-1}). \quad (2.19)$$

Si potrebbe pensare di definire l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  come il limite delle somme di Riemann, cioè porre

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n f(z_j) \cdot (z_j - z_{j-1}) \right) \quad (2.20)$$

(i punti  $t_j$  e le loro immagini  $z_j$  dipendono ovviamente anche dal valore di  $n$ : non indichiamo esplicitamente questa dipendenza, per non appesantire troppo la notazione). In effetti, questa seconda definizione non solo sarebbe perfettamente lecita, ma sarebbe in totale accordo con la (2.14). Infatti, se in ogni somma di Riemann moltiplichiamo e dividiamo ogni termine per il corrispondente incremento temporale  $t_j - t_{j-1}$ , otteniamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n f(z(t_j)) \frac{z(t_j) - z(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} (t_j - t_{j-1}) \right). \quad (2.21)$$

Si può dimostrare non solo che il limite esiste, ma che esso coincide col membro destro della (2.14): la presenza della derivata  $z'(t)$  nella (2.14), infatti, è dovuta proprio alla presenza dei rapporti incrementali nella somme di Riemann, scritte come nella (2.21). Preferiamo comunque mantenere la (2.14) come definizione di integrale, perché essa si presta maggiormente al *calcolo* diretto del valore dell'integrale.

È comunque utile tenere presente che vale la caratterizzazione (2.20), perché ben si adatta a interpretare il significato dell'integrale complesso da un punto di vista fisico e geometrico. Infatti, ponendo

$$\Delta z_j = z_j - z_{j-1} = \Delta x_j + i \Delta y_j,$$

la somma di Riemann (2.19) si può scrivere come

$$\begin{aligned} \sum_n (u(z_j) + iv(z_j)) (\Delta x_j + i \Delta y_j) &= \sum_n (u(z_j) \Delta x_j - v(z_j) \Delta y_j) + \\ &+ i \sum_n (v(z_j) \Delta x_j + u(z_j) \Delta y_j). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Consideriamo ad esempio la parte reale di questa somma. La quantità  $u(z_j) \Delta x_j - v(z_j) \Delta y_j$  si può interpretare come prodotto scalare tra i due vettori

$$\vec{E}_j = \begin{pmatrix} u(z_j) \\ -v(z_j) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta \vec{l}_j = \begin{pmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Pensando al vettore  $\vec{E}_j$  come al campo vettoriale

$$\vec{E}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix}$$

calcolato nel punto  $z_j$  della curva<sup>4</sup>, e al vettore  $\Delta \vec{l}_j$  come a un incremento (che, passando al limite, diventerà infinitesimo) di posizione lungo la curva, risulta chiaro, in base alla (2.20), che la parte reale dell'integrale complesso di  $f$  lungo  $\gamma$  non è nient'altro che l'*integrale di linea* (detto anche *circuitazione* se  $\gamma$  è una curva chiusa) del campo vettoriale  $\vec{E}$  lungo il cammino  $\gamma$ . Ad esempio, se  $\vec{E}$  rappresenta un campo di forze, la parte reale dell'integrale complesso rappresenta il *lavoro* compiuto dal campo di forze lungo il cammino  $\gamma$ . Notiamo inoltre che, identificando ancora i numeri complessi coi vettori, il campo  $\vec{E}$  si ottiene da  $f(z)$  passando alla funzione coniugata. In formule,

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad \vec{E}(x, y) = \overline{f(x + iy)}.$$

Veniamo ora all'interpretazione della parte immaginaria dell'integrale. Nella seconda sommatoria della (2.22), analogamente, la quantità  $v(z_j)\Delta x_j + u(z_j)\Delta y_j$  si può interpretare come prodotto scalare tra i due vettori

$$\vec{E}_j = \begin{pmatrix} u(z_j) \\ -v(z_j) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{n}_j = \begin{pmatrix} \Delta y_j \\ -\Delta x_j \end{pmatrix}.$$

Notiamo che il vettore  $\vec{n}_j$  è ortogonale al vettore  $\Delta \vec{l}_j$  definito nella (2.23), anzi  $\vec{n}_j$  si ottiene ruotando  $\Delta \vec{l}_j$  di 90 gradi in senso orario. Quindi, se indichiamo con  $\nu_j$  il vettore normalizzato

$$\nu_j = \frac{\vec{n}_j}{\Delta l_j}, \quad \Delta l_j = \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2},$$

esso rappresenta una approssimazione del versore normale alla curva, nel punto  $z_j$  (è infatti perpendicolare al segmento di estremi  $z_{j-1}$  e  $z_j$ ), e possiamo scrivere

$$v(z_j)\Delta x_j + u(z_j)\Delta y_j = \vec{E}_j \cdot \vec{n}_j = \vec{E}_j \cdot \nu_j \Delta l_j.$$

Questa quantità rappresenta quindi il *flusso* del vettore  $E(z_j)$  attraverso il segmento  $\Delta \vec{l}_j$  (con la normale orientata verso destra, rispetto all'orientazione del segmento). Sommando e passando al limite, si ottiene quindi che

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot \nu dl, \quad \vec{E}(x, y) = \overline{f(x + iy)}, \quad (2.24)$$

ovvero la parte immaginaria dell'integrale complesso di  $f(z)$  lungo  $\gamma$ , rappresenta il *flusso* del campo vettoriale  $\vec{E}$  attraverso la curva  $\gamma$  (nella formula,  $\nu$  indica la normale alla curva, orientata verso destra rispetto al verso di percorrenza della curva stessa).

<sup>4</sup> Al solito, per comodità, identifichiamo i numeri complessi coi vettori nel piano.

**Esempio 2.23** Vogliamo calcolare la circuitazione ed il flusso uscente del campo vettoriale  $\vec{E}(x, y) = (x, y)$ , relativamente alla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine, orientata in senso antiorario. Per quanto detto prima, conviene considerare la funzione di variabile complessa  $f(z) = \bar{z}$ , in modo che il campo vettoriale  $\vec{E}$  sia rappresentato dalla funzione  $\overline{f(z)}$  (lo si verifichi), e calcolare il suo integrale complesso lungo la circonferenza. Per parametrizzare la circonferenza  $C$ , consideriamo la curva

$$z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Si ha  $z'(t) = ie^{it}$  e quindi usando la definizione (2.14) troviamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

L'integrale complesso ha parte reale nulla e parte immaginaria uguale a  $2\pi$ : la circuitazione del campo lungo  $\gamma$  è quindi nulla, mentre il flusso uscente è pari a  $2\pi$  (si noti che, avendo orientato la circonferenza in senso antiorario, il versore normale punta verso l'esterno, essendo orientato a destra rispetto al verso di percorrenza della curva).  $\square$

Introduciamo ora due definizioni che utilizzeremo nel seguito.

Associato al sostegno  $C$ , parametrizzato dalla curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , vi è il cammino indicato con  $-\gamma$  che ha lo stesso sostegno di  $\gamma$  percorso nel senso inverso. In altre parole, il cammino  $-\gamma$  unisce il punto  $z(b)$  col punto  $z(a)$  ed è descritto dalla parametrizzazione  $z = z(-t)$ , con  $-b \leq t \leq -a$ .

Sia data la curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ; introduciamo una suddivisione di  $[a, b]$  mediante i punti  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e consideriamo i punti  $z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_n)$  appartenenti al sostegno. La quantità

$$\sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} (|z(t_1) - z(t_0)| + |z(t_2) - z(t_1)| + \dots + |z(t_n) - z(t_{n-1})|), \quad (2.25)$$

dove l'estremo superiore è fatto al variare di tutte le scelte di numeri reali  $t_i$  viene chiamata **lunghezza della curva**. Notiamo che, per una data scelta dei numeri  $t_i$ , la sommatoria che compare nella (2.25) rappresenta la lunghezza della spezzata che si ottiene congiungendo tra loro, tramite segmenti, i punti del sostegno  $z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_n)$ , presi in questo ordine.

Immaginiamo, per fissare le idee, che  $z(t)$  sia una curva *semplice*. Intuitivamente, è chiaro che la lunghezza di qualsiasi spezzata ottenuta in questo modo fornisce una approssimazione per difetto della lunghezza della curva (dove la parola "lunghezza" è usato qui nel senso intuitivo del termine). D'altra parte, si intuisce anche che, infittendo la spezzata (cioè considerando un numero via via maggiore di punti del supporto), si ottiene una approssimazione via via migliore della lunghezza effettiva della curva. Queste considerazioni intuitive giustificano la presenza dell'estremo superiore, nella *definizione* di lunghezza tramite la (2.25).

Effettivamente, nel caso in cui  $z(t)$  sia una curva semplice, si può dimostrare che la sua lunghezza dipende unicamente dal supporto  $C$ , e non dal modo in cui  $C$  è parametrizzato (purché la parametrizzazione sia iniettiva). In altre parole, la lunghezza è effettivamente una caratteristica geometrica del supporto  $C$ .

In ogni caso, in base alla nostra definizione di curva, si può dimostrare che la lunghezza  $L$  definita nella (2.25) è sempre *finita*, e può essere calcolata tramite il seguente integrale:

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Per interpretare il significato di questo integrale notiamo che, per quanto detto in questo paragrafo, la derivata  $z'(t)$  rappresenta la velocità istantanea con cui la curva viene percorsa al tempo  $t$ . Il suo modulo  $|z'(t)|$  rappresenta quindi la velocità scalare al tempo  $t$ : integrando la velocità scalare rispetto al tempo, si ottiene di fatto la “lunghezza del percorso”, ovvero -più precisamente- la lunghezza della curva.

Torniamo all'integrale complesso e alla sua definizione.

**Proposizione 2.24** *Sia  $\gamma$  un cammino e siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue a tratti su  $C$ , sostegno di  $\gamma$ . Allora*

a) per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz;$$

b)  $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$

c) sia  $M \geq 0$  tale che  $|f(z)| \leq M$  su  $C$  e sia  $L$  la lunghezza di  $\gamma$ ; si ha

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML; \quad (2.26)$$

d) se  $C$  è l'unione dei sostegni  $C_1$  e  $C_2$  di due curve  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $z_1(b_1) = z_2(a_2)$ , risulta

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Lasciamo la dimostrazione di queste proprietà dell'integrale come esercizio, soffermandoci soltanto sul punto c) che fornisce un'utile maggiorazione per il modulo di un integrale complesso. Per mostrare la (2.26), è utile ricorrere alla caratterizzazione (2.20). Infatti, nelle ipotesi del punto c), per una qualsiasi somma di Riemann si ha

$$\left| \sum_{j=1}^n f(z_j) \cdot (z_j - z_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(z_j)| \cdot |z_j - z_{j-1}| \leq M \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}| \leq ML$$

(si noti che l'ultima sommatoria è la lunghezza della poligonale individuata dai punti  $z_j$ , ed è quindi minore o uguale rispetto alla lunghezza  $L$  della curva). Passando al limite sulle somme di Riemann, si ottiene la maggiorazione (2.26).

**Esempi 2.25** a) Calcoliamo  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , dove  $\gamma$  è descritta dall'equazione  $z = z(t) = 2t + it$ ,  $0 \leq t \leq 2$ . Poiché  $z'(t) = 2 + i$ , dalla (2.14), si ha

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^2 (2t - it)(2 + i) dt = (2 - i)(2 + i) \int_0^2 t dt = 10.$$

b) Calcoliamo  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , dove  $\gamma$  è l'unione dei cammini  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  descritti rispettivamente dalle equazioni  $z_1(t) = t$ ,  $t \in [0, 4]$ , e  $z_2(t) = 4 + it$ ,  $t \in [0, 2]$ . Poiché  $z_1'(t) = 1$  e  $z_2'(t) = i$ ,

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_0^4 t dt + \int_0^2 (4 - it)i dt = 10 + 8i.$$

c) Calcoliamo  $\int_{\gamma} e^z dz$ , dove  $\gamma$  è il cammino descritto in a). Poiché  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ , si ha

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_0^2 e^{2t} (\cos t + i \sin t)(2 + i) dt = \dots = e^{4+2i} - 1.$$

d) Calcoliamo  $\int_{\gamma} e^z dz$ , dove  $\gamma$  è il cammino descritto in b). Risulta

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_0^4 e^t dt + \int_0^2 e^4 (\cos t + i \sin t)i dt = \dots = e^{4+2i} - 1.$$

Si osservi come gli integrali della funzione  $f(z) = \bar{z}$  lungo due cammini, entrambi aventi come estremi i punti  $0$  e  $4 + 2i$ , abbiano valori differenti, mentre per la funzione  $f(z) = e^z$  essi assumano lo stesso valore.  $\square$

**Esempio 2.26** Calcoliamo  $\int_{\gamma} z^n dz$  dove  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\gamma$  è il cammino percorso in senso antiorario, il cui sostegno è la circonferenza  $\{|z| = 1\}$ . Usiamo la parametrizzazione (2.12)  $z = z(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ; allora  $z'(t) = ie^{it}$  e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} e^{int} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1, \\ 2\pi i & n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Un analogo risultato vale se  $\gamma$  è il cammino, percorso in senso antiorario, il cui sostegno è la circonferenza centrata in  $z_0 \in \mathbb{C}$  e avente raggio  $r > 0$ . Precisamente si ha

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 2\pi i & n = -1. \end{cases} \quad (2.27)$$

## 2.6 Teorema di Cauchy-Goursat

Il seguente teorema è uno dei risultati fondamentali della teoria delle funzioni olomorfe. Esso venne dimostrato da Cauchy con l'ipotesi aggiuntiva di continuità della derivata e, in un secondo tempo, da Goursat nella sua forma più generale che qui riportiamo.

**Teorema 2.27 (di Cauchy-Goursat)** *Sia  $\gamma$  una curva di Jordan, contenuta in un insieme aperto  $\Omega$ , tale che il suo interno  $A$  sia ancora contenuto in  $\Omega$ . Se  $f(z)$  è una funzione olomorfa in  $\Omega$ , allora si ha*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Occorre riflettere attentamente sul significato di questo teorema e sulle sue ipotesi. Il valore dell'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  dipende unicamente dai valori che  $f$  assume nei punti del sostegno  $C$ ; tuttavia, le ipotesi richiedono che  $f$  sia olomorfa in un aperto  $\Omega$  che contiene sia  $C$  sia la regione  $A$  delimitata da  $C$ .

Qui dimostreremo questo risultato nell'ipotesi più restrittiva che la derivata prima  $f'(z)$  sia anch'essa una funzione continua nell'aperto  $\Omega$ . Faremo discendere il teorema di Cauchy-Goursat dal seguente importante teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

Ricordiamo che, se  $\vec{E}(x, y) = (a, b)$  è un campo vettoriale piano avente per componenti due funzioni  $a(x, y)$  e  $b(x, y)$  di classe  $C^1$ , si chiama *divergenza* di  $\vec{E}$  la funzione

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}, \quad (2.28)$$

mentre si chiama *rotore* (o vorticità) di  $\vec{E}$  la quantità

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (2.29)$$

**Teorema 2.28 (Formula di Gauss-Green)** *Sia  $\gamma$  una curva di Jordan, contenuta in un insieme aperto  $\Omega$ , tale che la parte di piano  $A$  delimitata dal sostegno  $C$  sia anch'essa contenuta in  $\Omega$ . Se  $\vec{E}(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un campo vettoriale avente per componenti due funzioni di classe  $C^1$ , allora si ha*

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{E} \, dx dy, \quad (2.30)$$

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \nu \, dl = \iint_A \operatorname{div} \vec{E} \, dx dy. \quad (2.31)$$

In altre parole, la circuitazione di  $\vec{E}$  lungo  $\gamma$  è uguale all'integrale del rotore di  $\vec{E}$  all'interno di  $\gamma$ , mentre il flusso di  $\vec{E}$  uscente da  $\gamma$  è uguale all'integrale della divergenza di  $\vec{E}$ , esteso all'interno di  $\gamma$ .

Per dimostrare il Teorema di Cauchy-Goursat nell'ipotesi che  $f'(z)$  sia continua, è sufficiente considerare il campo vettoriale

$$\vec{E}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix}$$

dove  $u$  e  $v$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $f$ . Calcoliamo divergenza e rotore di  $\vec{E}$ . Si ha

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

e quindi, applicando le condizioni di Cauchy-Riemann, si ottiene che il campo  $\vec{E}$  ha divergenza nulla e rotore nullo. Pertanto, dalla formula di Gauss-Green, segue che sia la circuitazione di  $\vec{E}$  (parte reale dell'integrale complesso di  $f$ ) lungo  $\gamma$  sia il flusso di  $\vec{E}$  (parte immaginaria dell'integrale complesso di  $f$ ) attraverso  $\gamma$  sono nulli. Di conseguenza, l'integrale complesso di  $f$  lungo  $\gamma$  è nullo, e si ottiene il teorema di Cauchy-Goursat.

Ricordiamo che un campo a rotore nullo è detto *irrotazionale*, mentre un campo a divergenza nulla è detto *solenoidale* (ad esempio, il campo elettrico dovuto a una distribuzione stazionaria di cariche è ovunque irrotazionale e solenoidale, nei punti al di fuori delle cariche che lo generano). Da quanto appena detto segue subito che il campo  $\vec{E}$  associato a  $\overline{f(z)}$  è irrotazionale e solenoidale, nelle regioni dove  $f(z)$  è analitica.

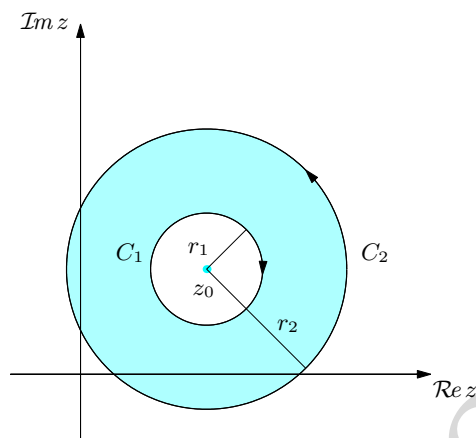
Osserviamo che il cammino considerato può essere sostituito da un cammino chiuso non necessariamente semplice. Infatti, se  $\gamma$  interseca sé stesso solo un numero finito di volte, allora è formato da un numero finito di cammini semplici e chiusi. È dunque possibile applicare il teorema ad ognuno di essi e ottenere il risultato per il cammino  $\gamma$ .

Il teorema può essere esteso a domini più generali. Iniziamo con l'introdurre la nozione di dominio semplicemente connesso, ovvero un dominio al quale si applica il Teorema di Cauchy-Goursat.

**Definizione 2.29** Un dominio semplicemente connesso  $D$  è un dominio tale che l'interno di ogni cammino semplice e chiuso è interamente contenuto in  $D$ .

Intuitivamente, un dominio semplicemente connesso è un insieme senza buchi. Sono, ad esempio, semplicemente connessi gli intorni e i poligoni, mentre non lo è una corona circolare.

Introduciamo ora la nozione di dominio con bordo.



**Figura 2.3.** Anello  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$

**Definizione 2.30** Chiameremo **dominio con bordo** un dominio  $\Omega$  la cui frontiera  $\partial\Omega$  è l'unione di un numero finito di sostegni  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , a due a due disgiunti, di cammini chiusi e semplici,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

Ciascuno di questi cammini è orientato in modo tale che un osservatore ideale che percorre la frontiera vede  $\Omega$  alla sua sinistra. Chiameremo tale orientamento **orientamento positivo**.

**Esempio 2.31** Ogni anello  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  è un dominio con bordo la cui frontiera è l'unione dei sostegni  $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_1\}$  e  $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_2\}$  relativi ai cammini  $-\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dove  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  ammettono parametrizzazioni  $z_1(t) = z_0 + r_1 e^{it}$  e  $z_2(t) = z_0 + r_2 e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Si noti che la circonferenza esterna è percorsa in senso antiorario, mentre la circonferenza interna in senso orario (si veda la Figura 2.3).  $\square$

**Teorema 2.32** Sia  $\Omega$  un dominio con bordo e sia  $\gamma$  l'unione dei cammini i cui sostegni coincidono con la frontiera di  $\Omega$  orientata positivamente. Sia  $f$  analitica in un aperto che contiene l'unione di  $\Omega$  con la sua frontiera; allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $C_0$  il cammino esterno e  $C_1, \dots, C_n$  quelli contenuti nell'interno di  $C_0$  (si veda la Figura 2.4). Consideriamo un cammino che

**Figura 2.4.** ??????????????????

**Figura 2.5.** ???????????????????

decomponga  $\Omega$  in due parti  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  per mezzo di cammini  $L_1, \dots, L_{n+1}$  congiungenti rispettivamente  $C_0$  a  $C_1$ ,  $C_1$  a  $C_2$ ,  $\dots$ ,  $C_{n-1}$  a  $C_n$  e  $C_n$  a  $C_0$  (aventi sostegno in  $\Omega$ ). Indichiamo con  $K_j$  il cammino il cui sostegno coincide con la frontiera di  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ .  $K_1$  e  $K_2$  consistono di cammini  $L_j$  o  $-L_j$  e di parti di  $C$ . Il Teorema di Cauchy-Goursat 2.27 può essere applicato a  $f$  su  $K_1$  e  $K_2$  e la somma degli integrali su questi cammini è nulla. Poiché gli integrali in direzioni opposte lungo  $L_j$  si elidono, risulta

$$0 = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad \square$$

**Osservazione 2.33** Se  $f$  è analitica in  $\Omega$ , dominio semplicemente connesso, allora, per ogni  $z_1, z_2 \in \Omega$ , risulta ben definito  $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ . Esso è quell'unico numero corrispondente al valore dell'integrale di  $f$  lungo un qualsiasi cammino, con sostegno in  $\Omega$ , congiungente  $z_1$  a  $z_2$ . Infatti, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due cammini congiungenti  $z_1$  a  $z_2$ , l'integrale di  $f$  lungo il cammino chiuso ottenuto unendo  $\gamma_1$  a  $-\gamma_2$  è nullo; dunque

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

e quindi

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \square$$

**Osservazione 2.34** Supponiamo che  $\Omega$  sia un dominio con bordo la cui frontiera sia l'unione dei sostegni  $C_1$  e  $C_2$  di due cammini chiusi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (si veda la Figura 2.5). Sia  $f$  analitica in un aperto contenente  $\Omega \cup \partial\Omega$ , allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

dove i sostegni  $C_1$  e  $C_2$  sono percorsi in senso antiorario. □

È possibile dimostrare un risultato che può considerarsi il viceversa del Teorema di Cauchy-Goursat. Vale infatti il seguente teorema dovuto a Morera.

**Teorema 2.35 (di Morera)** *Se  $f$  è una funzione continua in un dominio semplicemente connesso  $D$  e se, per ogni cammino semplice e chiuso  $\gamma$  il cui sostegno sia contenuto in  $D$ , risulta*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

*allora  $f$  è analitica in  $D$ .*

Figura 2.6. ???????????????????

## 2.7 Formula integrale di Cauchy

Stabiliamo ora il seguente fondamentale risultato.

**Teorema 2.36 (formula integrale di Cauchy)** *Sia  $f$  analitica in un aperto contenente  $\Omega \cup \partial\Omega$ , con  $\Omega$  dominio e  $\partial\Omega$  sostegno di un cammino chiuso e semplice  $\gamma$  percorso in verso antiorario. Se  $z_0 \in \Omega$ , allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.32)$$

**Dimostrazione.** Poiché  $\Omega$  è aperto, esiste  $r_0 > 0$  tale che  $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega$ . Indichiamo con  $\gamma_0$  il cammino chiuso e semplice percorso in verso antiorario il cui sostegno è la circonferenza  $C_0 = \{|z - z_0| = r_0\}$  (si veda la Figura 2.6). Consideriamo la funzione  $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ ; essa è analitica in  $(\Omega \setminus \{z_0\}) \cup \partial\Omega$  e dunque, per l'Osservazione 2.34, risulta

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma_0} g(z) dz = f(z_0) \int_{\gamma_0} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Ricordando la (2.27), si ha

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i f(z_0) + \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Verifichiamo ora che l'ultimo integrale è nullo, ottenendo così la (2.32). Poiché  $f$  è continua, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $z \in \Omega$  con  $|z - z_0| < \delta$  si ha  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Non è restrittivo supporre che  $r_0 \leq \delta$ . Pertanto, grazie alla (2.26), si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &\leq \sup_{z \in C_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \cdot 2\pi r_0 \\ &= 2\pi \sup_{z \in C_0} |f(z) - f(z_0)| < 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , otteniamo l'asserto.  $\square$

**Esempio 2.37** Si voglia calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz$$

dove  $\gamma$  è il cammino (verso antiorario) il cui sostegno coincide con la circonferenza  $\{|z| = 2\}$ .

La funzione  $f(z) = \frac{z}{9 - z^2}$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne nei punti  $z = \pm 3$  e quindi, in particolare, sull'insieme  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$  unito alla frontiera  $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ . Possiamo pertanto applicare la formula integrale di Cauchy (2.32) con  $z_0 = -i$  e ottenere

$$f(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + i} dz = -\frac{i}{10}.$$

In definitiva

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + i} dz = \frac{\pi}{5}. \quad \square$$

Usando il Teorema 2.36, possiamo dimostrare che se una funzione è analitica in un punto  $z_0$  allora esistono (in  $z_0$ ) le derivate di ogni ordine, ovvero le derivate successive sono anch'esse funzioni analitiche in  $z_0$ . Precisamente vale il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 2.38** *Sia  $f$  analitica in  $z_0$ , allora le sue derivate di ogni ordine esistono in  $z_0$ . Inoltre, per ogni intero  $n \geq 1$  e per ogni cammino  $\gamma$  semplice e chiuso (verso antiorario) il cui sostegno sia contenuto nell'intorno di  $z_0$  in cui  $f$  è derivabile, si ha*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (2.33)$$

**Esempio 2.39** Sia  $f(z) = 1$ , allora  $f^{(n)}(z) = 0$ , per ogni  $n \geq 1$ . Dunque, applicando la (2.33) a  $f$  per ogni  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ritroviamo la (2.27):

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

dove  $\gamma_0$  è, ad esempio, il cammino con sostegno la circonferenza di raggio  $r_0 > 0$  e centro  $z_0$ .  $\square$

**Osservazione 2.40** Ricordando il Teorema 2.32, è immediato verificare che le formule (2.32) e (2.33) possono essere estese al caso in cui il cammino chiuso e semplice  $\gamma$  è sostituito dalla frontiera orientata di un dominio con bordo.  $\square$

## 2.8 Risultati globali

Diamo ora una serie di risultati che si riferiscono al comportamento di una funzione in una regione (o anche in tutto il piano complesso).

Mostriamo innanzitutto che il valore di una funzione al centro di un cerchio sul quale essa è analitica dipende soltanto dai valori della funzione sulla frontiera di tale cerchio. Precisamente, si ha

**Teorema 2.41 (Proprietà della media)** *Sia  $f$  analitica su un insieme semplicemente connesso  $D$  unito alla sua frontiera. Sia  $z_0 \in D$  e  $r > 0$  tale che  $B_r(z_0) \subset D$ . Allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\gamma$  il cammino semplice e chiuso percorso in senso antiorario descritto dalla parametrizzazione  $z = z(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Allora, applicando la (2.32), si ottiene

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Enunciamo ora il cosiddetto principio del massimo che si può dedurre dalla proprietà della media.

**Teorema 2.42 (Principio del massimo)** *Sia  $f$  analitica e non costante in un dominio  $\Omega$ , sia inoltre continua in  $\Omega \cup \partial\Omega$ . Allora  $|f(z)|$  raggiunge il suo valore massimo sulla frontiera  $\partial\Omega$ .  $\square$*

Analoghe proprietà si possono dedurre per le funzioni armoniche  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ .

**Teorema 2.43 (di Liouville)** *Sia  $f$  intera e limitata per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , allora  $f(z)$  è costante.*

**Dimostrazione.** Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r_0 > 0$  e  $\gamma_0$  il cammino di sostegno  $C_0$  parametrizzato da  $z = z(t) = z_0 + r_0 e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Per ipotesi, esiste  $M > 0$  tale che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z$ . Dalla formula (2.33) con  $n = 1$ , usando la (2.26), si ha

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in C_0} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| \cdot 2\pi r_0 \\ &= \frac{1}{r_0} \sup_{z \in C_0} |f(z)| \leq \frac{M}{r_0}. \end{aligned}$$

Poiché  $r_0$  è arbitrario e  $f'(z_0)$  è un numero fissato, la disuguaglianza  $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r_0}$  può valere solo se  $f'(z_0) = 0$ . Quindi  $f'(z) = 0$ , per ogni  $z \in \mathbb{C}$  e dunque  $f(z)$  è costante.  $\square$

Un'interessante conseguenza del Teorema di Liouville è il Teorema fondamentale dell'algebra. Esso afferma che ogni polinomio  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , ha almeno uno zero; ossia esiste  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $P(z_0) = 0$ . In effetti, procedendo per assurdo, se  $P(z)$  fosse non nullo per ogni  $z \in \mathbb{C}$  allora la funzione  $f(z) = 1/P(z)$  sarebbe intera e limitata in  $\mathbb{C}$ . Si giunge così ad un assurdo in quanto, per il Teorema di Liouville, ne segue che  $f(z)$  è costante e conseguentemente anche il polinomio  $P(z)$  lo è.

## 2.9 Esercizi

1. Dire se le seguenti funzioni soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann nel loro dominio:

a)  $f(z) = |z|$       **b)**  $f(z) = \frac{1}{z}$       **c)**  $f(z) = z^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

2. Dire dove esiste la derivata delle seguenti funzioni e trovarne il valore:

a)  $f(z) = \frac{1}{z}$       **b)**  $f(z) = x^2 + iy^2$       **c)**  $f(z) = z \operatorname{Im} z$

**3.** Usando il Teorema 2.13, verificare che la funzione  $f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$  definita in  $\Omega = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$  è derivabile in ogni punto di  $\Omega$  con  $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$ .

**4.** Sia  $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$ ; allora  $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 3x^2$ . Perché  $f'(z) = 3x^2$  solo nel punto  $z = i$ ?

5. Dire se le seguenti funzioni sono analitiche nel loro dominio:

a)  $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$       b)  $f(z) = xy + iy$   
 c)  $f(z) = e^{-y}e^{ix}$       d)  $f(z) = e^ye^{ix}$   
 e)  $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$       f)  $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

6. Verificare che la funzione  $f(z) = \operatorname{Log} r + i\theta$  definita in  $\Omega = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$  è analitica in  $\Omega$  e  $f'(z) = \frac{1}{z}$ .

7. Verificare che le seguenti funzioni  $u(x, y)$  sono armoniche nel loro dominio e trovare la corrispondente funzione armonica coniugata  $v(x, y)$ :

a)  $u(x, y) = 2x(1 - y)$

b)  $u(x, y) = y^2 - x^2$

c)  $u(x, y) = \sinh x \sin y$

d)  $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

8. Sia  $f$  analitica in un dominio  $\Omega$ ; verificare che  $f$  è necessariamente costante se:

a) la funzione  $\overline{f(z)}$  è anch'essa analitica in  $\Omega$ ;

b)  $\operatorname{Im} f(z) = 0$  in  $\Omega$ .

9. Sia  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  analitica in  $\Omega$  con  $0 \neq \Omega$ . Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare (2.9), verificare che la funzione  $u(r, \theta)$  soddisfa l'equazione di Laplace in forma polare in  $\Omega$ :

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0. \quad (2.34)$$

10. Verificare che la funzione  $u(r, \theta) = \operatorname{Log} r$  è armonica in  $\Omega = \{z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ . Trovare un'armonica coniugata  $v(r, \theta)$  in  $\Omega$ .

11. Sia  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , un arco regolare. Verificare che se  $t = \phi(r)$ ,  $c \leq r \leq d$ , con  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $\phi \in C^1([c, d])$  e  $\phi'(r) > 0$ , allora

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_c^d |Z'(r)| dr$$

dove  $Z(r) = z(\phi(r))$ .

12. Calcolare, direttamente dalla definizione (2.14), l'integrale di linea delle seguenti funzioni lungo il cammino di cui è indicato il sostegno:

a)  $f(z) = z^2$   $C$ =segmento che unisce l'origine a  $2 + i$ ;

b)  $f(z) = \bar{z}$   $C$ =circonferenza unitaria centrata nell'origine;

c)  $f(z) = \frac{z+2}{z}$   $C$ =semicirconferenza superiore con  $r = 2$  e centro 0;

d)  $f(z) = e^z$   $C$ =segmento che unisce  $\pi i$  a 1;

e)  $f(z) = \frac{1}{(z+2+i)^2}$   $C$ =circonferenza con  $r = 4$  e centro  $-2 - i$ .

13. Sia  $\gamma$  il cammino percorso in verso antiorario il cui sostegno è la frontiera del quadrato con vertici nei punti  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 1 + i$ ,  $z = i$ . Calcolare

$$\int_{\gamma} e^{\pi \bar{z}} dz.$$

14. Verificare che, se  $C$  è la frontiera di un triangolo con vertici nei punti  $z = 0$ ,  $z = 3i$ ,  $z = -4$  orientato in verso antiorario, allora

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60.$$

15. Sia  $C$  la frontiera della circonferenza  $\{|z| = R\}$  percorsa in senso antiorario. Verificare che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_C \frac{\text{Log } z}{z^2} dz = 0.$$

16. Calcolare i seguenti integrali di linea lungo i cammini  $\gamma$  di cui è indicato il sostegno (percorsi in senso antiorario, se chiusi):

a)  $\int_{\gamma} z e^{-z} dz$  sostegno  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ;

b)  $\int_{\gamma} e^{\pi z} dz$  sostegno  $C =$  segmento da  $i$  a  $i/2$ ;

c)  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$  sostegno  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ;

d)  $\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz$  sostegno  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$ ;

e)  $\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz$  sostegno  $C =$  frontiera del quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ;

f)  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^4 - 1} dz$  sostegno  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 1\}$ ;

g)  $\int_{\gamma} \frac{e^z(z^2 - 3)}{2z^2 + 3} dz$  sostegno  $C = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + \frac{2}{3}(y - \sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 1\}$ .

### 2.9.1 Soluzioni

1. Condizioni di Cauchy-Riemann:

a) No

b) Poiché, per  $z \neq 0$ ,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & u_x(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & u_y(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ v(x, y) &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, & v_x(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & v_y(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Pertanto le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte per ogni  $z \neq 0$ .

c) È possibile procedere come nell'esercizio precedente, esplicitando le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ . In alternativa, osserviamo che la funzione  $f(z) = z$  è intera e, per il Teorema 2.4, anche  $f(z) = z \cdot z \cdots z = z^n$  lo è. Dunque soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.

2. Derivate:

a)  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ ,  $z \neq 0$ .

b) Risulta

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2, & u_x(x, y) &= 2x, & u_y(x, y) &= 0, \\ v(x, y) &= y^2, & v_x(x, y) &= 0, & v_y(x, y) &= 2y; \end{aligned}$$

le condizioni (2.4) sono verificate se  $x = y$  e dunque per ogni  $z = x + ix$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . In tali punti si ha

$$f'(x + ix) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x.$$

c) Poiché  $f(z) = (x + iy)y = xy + iy^2$ , si ha

$$\begin{aligned} u(x, y) &= xy, & u_x(x, y) &= y, & u_y(x, y) &= x, \\ v(x, y) &= y^2, & v_x(x, y) &= 0, & v_y(x, y) &= 2y; \end{aligned}$$

e dunque le (2.4) sono verificate solo in  $z = 0$  dove risulta

$$f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0.$$

3. Poiché  $f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ , si ha

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, & u_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}, & u_\theta(r, \theta) &= -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ v(r, \theta) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, & v_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}, & v_\theta(r, \theta) &= \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Quindi le condizioni (2.9) sono soddisfatte in  $\Omega$ . Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= e^{-i\theta}(u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta)) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-i\theta} e^{i\theta/2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-i\theta/2} = \frac{1}{2\sqrt{r} e^{-i\theta/2}} = \frac{1}{2f(z)}.
 \end{aligned}$$

## 4. Poiché

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= x^3, & u_x(x, y) &= 3x^2, & u_y(x, y) &= 0, \\
 v(x, y) &= -(y-1)^3, & v_x(x, y) &= 0, & v_y(x, y) &= -3(y-1)^2,
 \end{aligned}$$

la condizione  $u_x = v_y$  è verificata solo se  $x^2 + (y-1)^2 = 0$ , ossia se  $x = 0$  e  $y = 1$ . Dunque le (2.4) sono verificate solo in  $z = i$  e la funzione  $f$  è derivabile solo in  $z = i$  dove vale  $f'(i) = 0$ .

## 5. Funzioni analitiche:

- a) Sì con  $f(z) = (3-i)z$ ;                      b) No;                      c) Sì con  $f(z) = e^{iz}$ .  
 d) No;                      e) Sì in  $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}$ ;                      f) Sì in  $\mathbb{C} \setminus \{2, -1 \pm i\}$ .

## 7. Funzioni armoniche:

- a)  $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + c$ ;                      b)  $v(x, y) = -2xy + c$ .  
 c)  $v(x, y) = -\cosh x \cos y + c$ .  
 d) Poiché

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & u_{xx}(x, y) &= \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\
 u_y(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & u_{yy}(x, y) &= -\frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}
 \end{aligned}$$

la funzione  $u(x, y)$  è armonica. Per determinare  $v(x, y)$ , imponiamo l'uguaglianza  $u_x = v_y$ , da cui

$$v_y(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \phi(x).$$

Così

$$v_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \phi'(x);$$

dall'uguaglianza  $v_x = -u_y$ , si ottiene  $\phi'(x) = 0$ , ossia  $\phi(x) = c$ . In definitiva, un'armonica coniugata di  $u(x, y)$  è  $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + c$ .

## 8. Funzioni analitiche:

- a) Poiché le funzioni  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $g(z) = \overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$  sono analitiche in  $\Omega$ , dovranno valere per entrambe le condizioni di Cauchy-Riemann; dunque

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_x(x, y) = -v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = v_x(x, y) \end{cases}.$$

Allora  $u_x = -u_x$  e  $u_y = -u_y$ , ossia  $u_x = u_y = 0$  in  $\Omega$  e quindi  $u(x, y)$  è costante in  $\Omega$ . Analogamente,  $v_x = v_y = 0$  e anche la funzione  $v(x, y)$  è costante in  $\Omega$ .

9. Dalla relazione  $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ , derivando rispetto a  $r$  si ha

$$u_{rr} = -\frac{1}{r^2}v_\theta + \frac{1}{r}v_{\theta r}, \quad \text{ossia} \quad v_{\theta r} = ru_{rr} + \frac{1}{r}v_\theta;$$

analogamente, derivando rispetto a  $\theta$  la relazione  $\frac{1}{r}u_\theta = -v_r$ , si ha

$$\frac{1}{r}u_{\theta\theta} = -v_{r\theta}, \quad \text{ossia} \quad v_{r\theta} = -\frac{1}{r}u_{\theta\theta}.$$

Poiché  $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ , si ottiene

$$ru_{rr} + \frac{1}{r}v_\theta = -\frac{1}{r}u_{\theta\theta},$$

cioè

$$r^2u_{rr} + v_\theta + u_{\theta\theta} = 0.$$

Usando l'uguaglianza  $v_\theta = ru_r$ , otteniamo il risultato.

10. Per verificare che  $u(r, \theta)$  è armonica, osserviamo che

$$u_r(r, \theta) = \frac{1}{r}, \quad u_{rr}(r, \theta) = -\frac{1}{r^2}, \quad u_\theta(r, \theta) = u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

e quindi l'equazione (2.34) è verificata in  $\Omega$ . Dalla prima delle (2.9),  $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ , ricaviamo  $v_\theta(r, \theta) = ru_r(r, \theta) = 1$ . Pertanto

$$v(r, \theta) = \theta + \phi(r) \quad \text{e} \quad v_r(r, \theta) = \phi'(r).$$

Dalla seconda delle (2.9),  $\frac{1}{r}u_\theta = -v_r$ , otteniamo  $\phi'(r) = 0$ , ossia  $\phi(r) = c$ . In definitiva,  $v(r, \theta) = \theta + c$ .

11. Poiché  $Z(r) = z(\phi(r))$ , si ha

$$Z'(r) = z'(\phi(r))\phi'(r) \quad \text{e} \quad |Z'(r)| = |z'(\phi(r))|\phi'(r)$$

in quanto  $\phi'(r) > 0$ . Pertanto, con la sostituzione  $t = \phi(r)$  da cui  $dt = \phi'(r) dr$ , si ottiene

$$\int_c^d |Z'(r)| dr = \int_c^d |z'(\phi(r))|\phi'(r) dr = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

12. Integrali di linea:

a)  $\frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$ .

b) Parametizziamo la circonferenza unitaria con  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , da cui  $dz = ie^{it} dt$  e dunque

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

c) La semicirconferenza può essere descritta dall'equazione  $z = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Così  $z'(t) = 2ie^{it}$  e

$$\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{2e^{it}+2}{2e^{it}} 2ie^{it} dt = 2i \int_0^{\pi} (1+e^{it}) dt = 2\pi i + 4.$$

d)  $1 + e$ ; e)  $0$ .

13.  $\frac{4}{\pi}(e^{\pi} - 1)$ .

14. Utilizziamo la (2.26), ottenendo

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq ML$$

con  $|e^z - \bar{z}| \leq M$  per  $z \in C$  e  $L$  è la lunghezza di  $C$ . Non è difficile verificare che  $L = 12$ , in quanto i lati del triangolo hanno lunghezza rispettivamente 3, 5 e 4. Per determinare una costante  $M$  soddisfacente la relazione  $|e^z - \bar{z}| \leq M$ , osserviamo che

$$|e^z - \bar{z}| \leq |e^z| + |z| = e^x + |z| \leq e^0 + 4 = 5.$$

Pertanto vale la disuguaglianza desiderata.

15. Usando la (2.26), si ha

$$\left| \int_C \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{\text{Log } z}{z^2} \right|.$$

Ma

$$\max_{|z|=R} \left| \frac{\log z}{z^2} \right| = \frac{1}{R^2} \max_{|z|=R} |\text{Log } |z| + i \text{Arg } z| \leq \frac{1}{R^2} (\log R + \pi).$$

Allora

$$\left| \int_C \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right| \leq \frac{2\pi(\text{Log } R + \pi)}{R}$$

e, per  $R \rightarrow +\infty$ , la quantità la secondo membro tendendo a 0. Dunque

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \int_C \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right| = 0,$$

da cui l'asserto.

16. *Integrali di linea:*

- a) 0;                      b)  $\frac{1}{\pi}(i+1)$ ;                      c)  $\frac{\pi}{4}i$ .  
 d) All'interno della circonferenza  $C$ , la funzione  $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$  ha un unico punto di non analiticità  $z = 2i$ . Usando la (2.33) con  $n = 1$  e  $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$ , risulta

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2} \right|_{z=2i} = \frac{\pi}{16}.$$

- e) Nel quadrato in esame, la funzione  $g(z) = \frac{\cosh z}{z^4}$  ha un unico punto di non analiticità  $z = 0$ . Sempre usando la (2.33) con  $n = 3$  e  $f(z) = \cosh z$ , si ha

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left. \frac{d^3}{dz^3} \cosh z \right|_{z=0} = 0.$$

- f)  $\frac{\pi}{2}$ ;                      g)  $-\sqrt{\frac{3}{2}}\pi e^{\sqrt{\frac{3}{2}}i}$ .

Versione 8 marzo