

**APPUNTI DI TEORIA****2. GRANDEZZE FOTOMETRICHE**

La Fotometria utilizza un sistema coerente di grandezze con le relative unità di misura, dette *grandezze fotometriche* e *unità fotometriche*, che rappresentano l'equivalente "soggettivo" delle grandezze "oggettive" utilizzate nello studio del trasporto di energia per irraggiamento.

2.1 Flusso Luminoso (Φ)

Il flusso luminoso Φ si misura in lumen (lm) e rappresenta la potenza del fascio luminoso, pesata attraverso il fattore di visibilità $V(\lambda)$. Nel caso di radiazione monocromatica vale la relazione già accennata in precedenza:

$$\Phi(\lambda) = V(\lambda)W(\lambda)$$

Per una luce caratterizzata da una potenza spettrale che si assume continua nel campo del visibile:

$$W_\lambda = \frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$$

ammettendo, in base alle già citate leggi di Grassmann, che il flusso luminoso globale possa essere calcolato come somma delle singole componenti monocromatiche¹, si ha:

$$\Phi = \int_{380nm}^{780nm} V(\lambda)W_\lambda d\lambda = V_{max} \int_{380nm}^{780nm} v(\lambda)W_\lambda d\lambda$$

dove $V_{max} = 683 \text{ lm/W}$

2.2 Flusso luminoso per unità di area

Una grandezza che riveste notevole importanza in illuminotecnica è il flusso luminoso per unità di area; è consuetudine denominare tale grandezza con termini diversi a seconda che si faccia riferimento ad una superficie ricevente o emettente.

¹ Si noti come questa ipotesi, valida in campo illuminotecnico, non sia applicabile in acustica dove, per effetto del mascheramento, il calcolo della loudness di suoni di spettro qualsiasi comporta il ricorso a metodi assai più complessi.



Illuminamento (E)

L'illuminamento in un dato punto di una superficie è definito come il rapporto tra il flusso luminoso Φ incidente sulla superficie elementare e l'area A della superficie elementare stessa; in termini differenziali si ha dunque:

$$E = \frac{d\Phi}{dA}$$

L'unità di misura dell'illuminamento è il lux (lx); il lux è l'illuminamento prodotto su una superficie di 1 metro quadro ad opera di un flusso luminoso di 1 lumen. I valori di illuminamento che si riscontrano in pratica copre un intervallo molto ampio: per avere un'idea si può pensare che l'illuminamento prodotto dalla luna e dalle stelle in una notte serena è dell'ordine di 0,01 lux, mentre in una giornata estiva soleggiata l'illuminamento sul piano orizzontale può raggiungere valori dell'ordine di 100.000 lux.

Radianza (M)

La radianza è definita, in modo del tutto analogo all'illuminamento, come rapporto tra flusso luminoso uscente dalla superficie e area della superficie stessa:

$$M = \frac{d\Phi}{dA}$$

E' consuetudine utilizzare quale unità di misura della radianza il lm/m^2 , anziché il lx. A questo proposito è utile puntualizzare il diverso significato che assume il concetto di "flusso luminoso uscente", e quindi di radianza, a seconda del tipo di superficie luminosa in esame:

- Superfici che *emettono* luce: sono le cosiddette sorgenti luminose primarie, ad esempio il sole, una lampada, lo schermo di un computer, un LED, ecc. In questo caso il flusso uscente coincide con il flusso emesso dalla sorgente
- Superfici che *riflettono* la luce proveniente da una sorgente primaria, ad esempio lo schermo di un cinema, la pagina di un libro illuminata da una lampada, una parete esposta al sole, ecc. In questo caso il flusso uscente dalla superficie dipende dalle proprietà di riflessione della superficie; pertanto:

$$M = r E$$

dove r rappresenta il coefficiente di riflessione luminosa.

- Superfici traslucide che *trasmettono* la luce proveniente da una sorgente primaria, ad esempio una finestra illuminata da luce naturale. In questo caso il flusso uscente dalla superficie dipende dalle proprietà di trasmissione della superficie; pertanto:

$$M = t E$$

dove t rappresenta il coefficiente di trasmissione luminosa.



Ovviamente, come nel caso di flussi di radiazione termica o di onde sonore che incidono su una parete, il principio di conservazione dell'energia implica che la somma dei coefficienti di assorbimento, riflessione e trasmissione sia pari all'unità:

$$r + t + a = 1$$

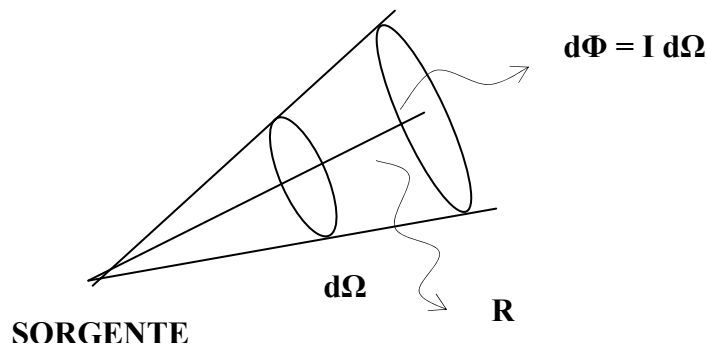
dove a rappresenta il coefficiente di assorbimento. Si noti che i coefficienti r , t ed a sono funzione della lunghezza d'onda. Nel successivo cap. 4 verranno inoltre meglio precisate le *caratteristiche direzionali* dei fenomeni di riflessione e trasmissione (riflessione speculare / diffusa, trasmissione diretta / diffusa).

Ovviamente, in campo illuminotecnico interessano esclusivamente i valori che tali coefficienti assumono nell'intervallo del visibile. Essi possono essere talvolta molto diversi dai corrispondenti valori nell'infrarosso: emblematico a questo riguardo è il caso della neve, che nel visibile presenta un valore di r molto vicino ad uno, mentre nell'infrarosso si comporta praticamente come un corpo nero ($r = 0$, $a = 1$).

2.3 Intensità Luminosa (I)

L'intensità luminosa esprime il flusso luminoso infinitesimo emesso da una sorgente, supposta puntiforme², all'interno di un angolo solido $d\Omega$ attorno ad una direzione assegnata:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$



² Si sottolinea che una sorgente luminosa si considera puntiforme quando le sue dimensioni caratteristiche sono piccole rispetto a quelle dell'ambiente in cui la sorgente è posta. Non è invece significativa la condizione che, in campo acustico, lega il concetto di sorgente puntiforme al rapporto tra lunghezza d'onda e dimensione caratteristica, in quanto le sorgenti luminose di interesse pratico hanno comunque dimensioni molto maggiori delle lunghezze d'onda della luce.



L'unità di misura è la candela (cd), che è l'unità fondamentale del sistema fotometrico³; il legame quantitativo fra candela e lumen è dunque:

$$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd}\cdot\text{sr}$$

Più precisamente, la candela è definita come l'intensità luminosa emessa in una data direzione da una sorgente che emette una radiazione monocromatica di lunghezza d'onda 555 nm e con intensità energetica in quella direzione di 1/683 W/sr, definizione che deriva da $V_{max} = 683 \text{ lm/W}$.

Contenendo informazioni di carattere direzionale, l'intensità luminosa è, a rigore, una grandezza vettoriale: l'involuppo dei vettori intensità individua il *solido fotometrico* della sorgente. Nel caso di sorgenti con emissione simmetrica rispetto ad un asse di rotazione, esso può essere rappresentato con un'unica curva meridiana, detta *indicatrice di emissione* della sorgente, che descrive la direzionalità della sorgente.

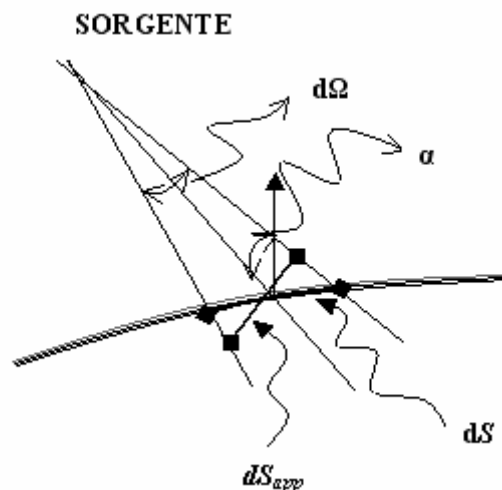
Il flusso emesso da una sorgente di cui sia definito il solido fotometrico si può calcolare con l'espressione:

$$\Phi = \int_{\Omega} I \, d\Omega = 4\pi I_m$$

dove l'intensità media della sorgente I_m è:

$$I_m = \frac{\Phi}{\int d\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi}$$

Nota la legge che descrive l'intensità in funzione dell'angolo di emissione $I(\alpha)$ è possibile calcolare l'illuminamento E prodotto in un punto di una superficie ricevente attraverso la seguente costruzione:



³ La scelta della candela quale unità di misura fondamentale deriva dalla definizione del campione fotometrico (v. par. 2.5)



$$E = \frac{d\Phi}{dS}; \quad d\Phi = I(\alpha)d\Omega; \quad d\Omega = \frac{dS_{app}}{R^2}; \quad dS_{app} = dS \cos \alpha$$

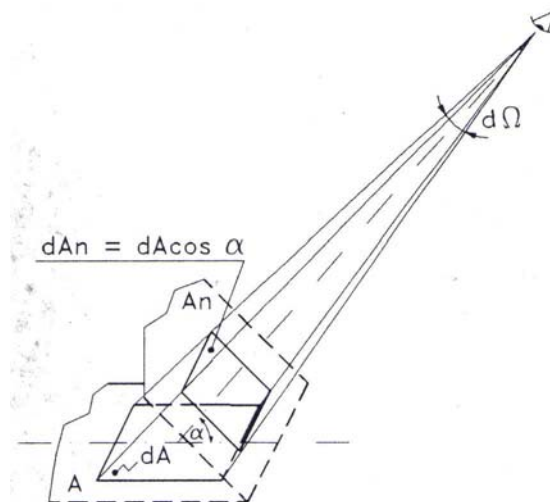
da cui:

$$E = \frac{I(\alpha) \cos \alpha}{R^2}$$

2.4 Luminanza (L)

Per sorgenti estese, ad esempio per una superficie illuminata riflettente, il concetto di intensità non è applicabile; riveste tuttavia fondamentale importanza ai fini della visibilità di una superficie estesa potere definire una grandezza che contenga informazioni di carattere direzionale. Si introduce quindi la *luminanza*, definita come rapporto tra l'intensità luminosa emessa in una data direzione (che tipicamente è la direzione individuata dalla congiungente l'elemento di superficie ed il punto di osservazione) e l'area della superficie emettente proiettata su un piano perpendicolare alla direzione stessa:

$$L = \frac{dI}{dS \cos \alpha} = \frac{d\left(\frac{d\Phi}{d\Omega}\right)}{dS \cos \alpha} = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos \alpha} = \frac{d\left(\frac{d\Phi}{dS}\right)}{d\Omega \cos \alpha} = \frac{dE}{d\Omega \cos \alpha}$$

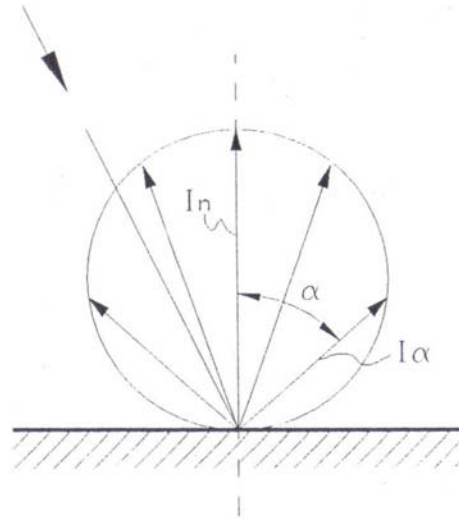


L'unità di misura è il nit, dove $1 \text{ nit} = 1 \text{ cd}\cdot\text{m}^{-2} = 1 \text{ lm}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.



Un caso particolare e di notevole utilità pratica è quello delle cosiddette *superfici lambertiane*, ovvero di superfici che emettono o riflettono la luce in modo perfettamente diffuso. L'intensità di emissione di una superficie lambertiana segue la *legge del coseno* (detta anche *legge di Lambert*):

$$I = I_0 \cos \alpha$$



dove I_0 è l'intensità massima emessa in direzione normale alla superficie. La luminanza di una superficie lambertiana non dipende dall'angolo di emissione in quanto:

$$L = \frac{dI}{dS \cos \alpha} = \frac{d(I_0 \cos \alpha)}{dS \cos \alpha} = \frac{I_0}{S} \quad \forall \alpha$$

Da tale risultato deriva la semplice relazione che lega luminanza L e radianza M della superficie. Per dimostrare tale relazione si fa uso della semplice costruzione sotto riportata: si considera una sfera di raggio R , il cui centro è posto sul punto di cui si vuole valutare la luminanza.

L'angolo solido infinitesimo $d\Omega$ è definito da due coni di apertura α e $\alpha+d\alpha$; il settore di superficie sferica intercettato dai due coni è:

$$dS = 2\pi R \sin \alpha \cdot R d\alpha; \quad \text{da cui:} \quad d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \sin \alpha d\alpha$$

Ricordando che $I(\alpha) = I_0 \cos \alpha$ si ha infine:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\alpha) d\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0 \cos \alpha 2\pi \sin \alpha d\alpha = \pi I_0$$

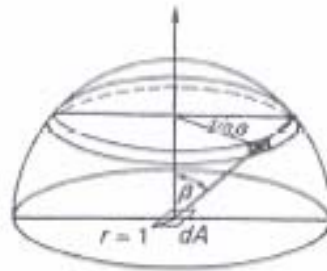
e dividendo ambo i membri per l'area della superficie emettente S :

$$M = \frac{\Phi}{S} = \pi \frac{I_0}{S} = \pi L$$



Questo risultato è particolarmente utile per calcolare la luminanza di una superficie diffondente con coefficiente di riflessione r , soggetta ad un illuminamento E , che risulta, per qualunque angolo di osservazione, semplicemente pari a:

$$L = \frac{M}{\pi} = \frac{rE}{\pi}$$



2.5 Campione Fotometrico

Per costruire un campione che consenta di rappresentare la grandezza fondamentale (intensità), si realizza una sorgente luminosa che simula nel modo più accurato possibile il comportamento di *corpo nero*; ciò è possibile realizzando una cavità a temperatura rigorosamente costante (2042 K, pari alla temperatura di fusione del platino) dotata di una piccola apertura. La radiazione termica uscente dall'apertura presenta lo spettro continuo caratteristico del corpo nero; in base alla legge di Wien che mette in relazione la temperatura assoluta T del corpo nero e la lunghezza d'onda per la quale si verifica la massima emissione λ_{max} :

$$\lambda_{max} T = 2898 \mu m \cdot K$$

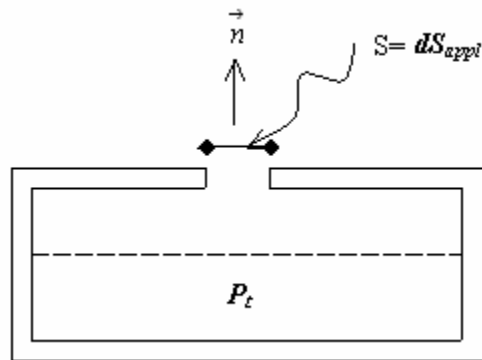
risulta:

$$\lambda_{max} = 1,42 \mu m$$

Sebbene l'emissione della sorgente presenti quindi il massimo valore nell'infrarosso, la frazione emessa nel visibile risulta comunque significativa e idonea per gli scopi previsti.

Per definizione, la luminanza della sorgente campione, valutata in direzione normale alla superficie emettente ($\alpha = 0$; $\cos \alpha = 1$), è:

$$L = 60 \text{ cd cm}^{-2}$$
$$L = \frac{I}{S_{app}} = \frac{I}{S}$$



Pertanto la candela è un sessantesimo dell'intensità luminosa irradiata in direzione normale da 1 centimetro quadro di superficie nera alla temperatura di fusione del platino.

Il valore massimo del fattore di visibilità può essere determinato applicando congiuntamente al campione fotometrico la legge di Planck, che descrive l'andamento spettrale dell'emissione monocromatica (e_λ , espressa in $W/m^2\mu m$) del corpo nero, e la legge di Grassmann, attraverso la quale è possibile esprimere una qualsiasi grandezza fotometrica (nel nostro caso la radianza M espressa in lm/m^2) relativa ad una luce di spettro qualsiasi nella forma integrale:

$$M = \int_{380nm}^{780nm} V(\lambda)e_\lambda d\lambda = V_{max} \int_{380nm}^{780nm} v(\lambda)e_\lambda d\lambda = \pi L$$

$$L = 60 cd cm^{-2} = 60 \cdot 10^4 cd m^{-2}$$

$$V_{max} = \frac{\pi \cdot 60 \cdot 10^4}{\int_0^\infty v(\lambda)e_\lambda d\lambda} = 683 lm W^{-1}$$