APPUNTI DI TEORIA

3. MODELLI DI SISTEMI ACUSTICI

3.1 Analogia fra sistemi acustici, meccanici, elettrici

Un approccio largamente utilizzato nella modellazione matematica di dispositivi e sistemi acustici si basa sull'osservazione che le equazioni che ne descrivono il comportamento sono formalmente identiche a quelle che rappresentano sistemi equivalenti di tipo meccanico o elettrico.

I *sistemi elettrici* / *meccanici* in oggetto sono rappresentati attraverso modelli a parametri concentrati, costituiti da elementi di tipo *induttivo*, *capacitivo* e *resistivo*, soggetti a *differenze di potenziale* / *forze* che determinano *correnti* / *velocità*. Nello schema sotto riportato sono riassunte le definizioni ed equazioni caratteristiche in campo elettrico e meccanico; le corrispondenti grandezze e definizioni in campo acustico saranno introdotte successivamente.

SISTEMA MECCANICO

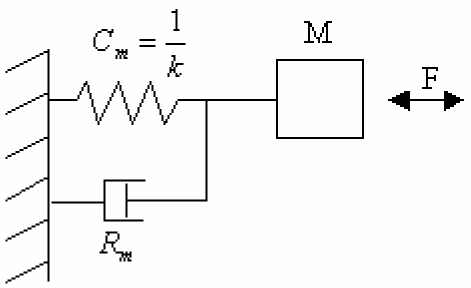
$$F = M\frac{du}{dt} + R_m u + \frac{1}{C_m}\int_0^t u\,dt$$

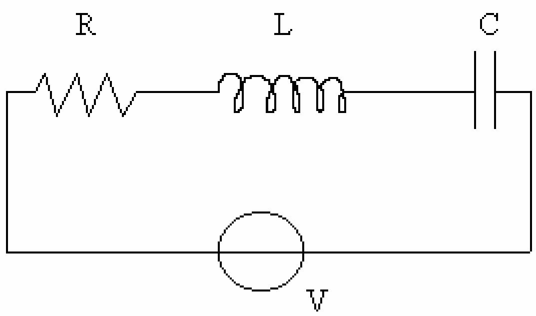
u = velocità di vibrazione
F = forza vibromotrice
M = massa
R_m = resistenza meccanica
C_m = cedevolezza meccanica

SISTEMA ELETTRICO

$$V = L\frac{di}{dt} + R\,i + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

i = corrente
V = differenza di potenziale
L = induttanza
R = resistenza elettrica
C = capacità elettrica





Utilizzando la notazione complessa, l'espressione dell'impedenza per i sistemi meccanico ed elettrico assume la forma:

$$Z_m = \frac{F}{U} = R_m + j(\omega M - \frac{1}{\omega C_m}) = R_m + jX_m$$

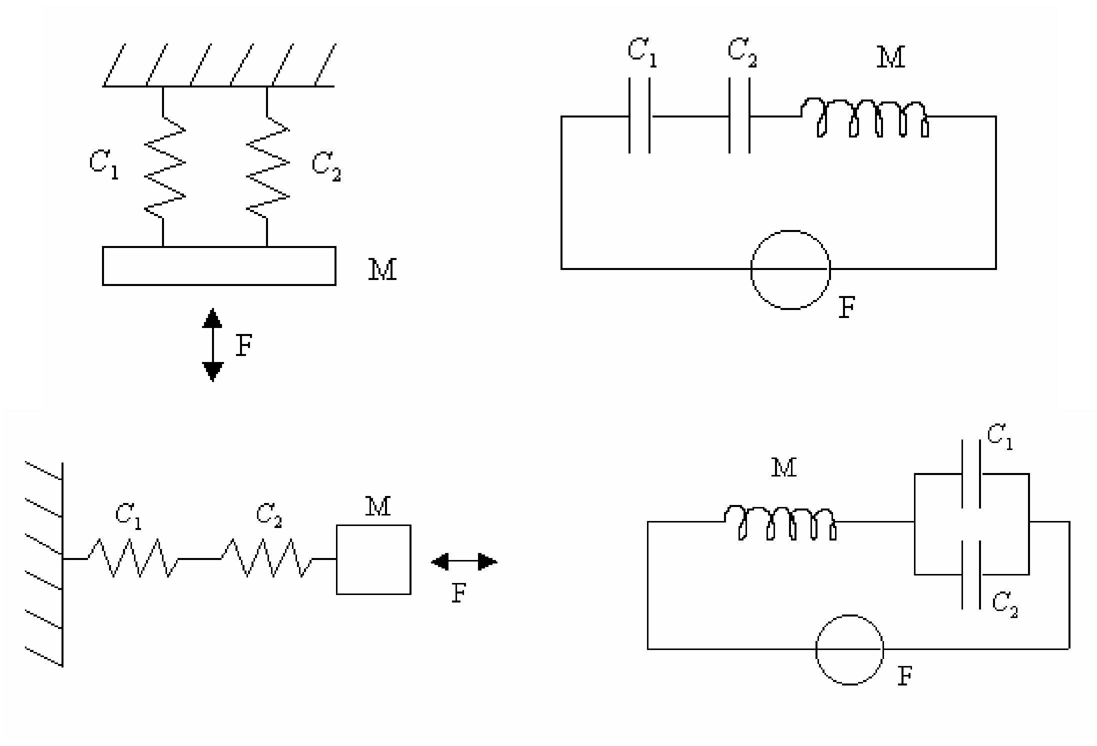
Z_m = impedenza meccanica
R_m = resistenza meccanica
X_m = reattanza meccanica

$$Z = \frac{F}{U} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$$

Z = impedenza elettrica
R = resistenza elettrica
X = reattanza elettrica

Per la costruzione di circuiti equivalenti si considerano le seguenti regole (v. figura):

- elementi in serie hanno in comune la velocità / corrente
- elementi in parallelo hanno in comune la forza / differenza di potenziale



3.2 Elementi base dei sistemi acustici

Nella rappresentazione dei sistemi acustici si utilizzano le seguenti grandezze:

p = pressione sonora

Ψ = portata acustica = $S \cdot u$ (con u = velocità delle particelle uniforme sulla sup. di area S)

che sono rispettivamente equivalenti alla forza / differenza di potenziale e alla velocità / corrente. Per analogia con i sistemi meccanici / elettrici si introduce l'impedenza acustica Z_a definita in notazione complessa dall'espressione:

$$Z_a = \frac{P}{\Psi} = R_a + jX_a = R_a + j\left(\omega M_a - \frac{1}{\omega C_a}\right)$$

dove:

R_a = resistenza acustica
X_a = reattanza acustica
M_a = massa (inertanza) acustica
C_a = cedevolezza acustica

Nella rappresentazione di sistemi acustici, quali i trasduttori elettroacustici (microfoni, diffusori sonori, ecc.) o i dispositivi di controllo del rumore (silenziatori dissipativi e reattivi, ecc.), si considerano i componenti elementari quali le *cavità* e i *tubi*, per i quali è possibile calcolare l'impedenza acustica.

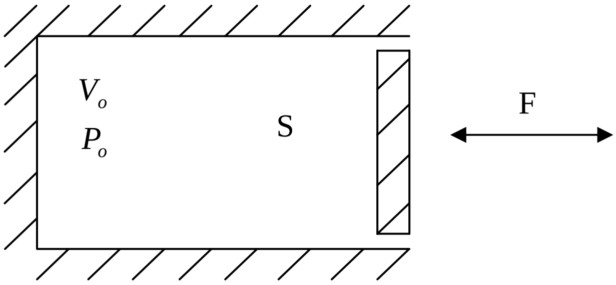
3.2.1 Cavità acustica

Si considera una cavità che nelle condizioni indisturbate presenta un volume V_o e una pressione p_o. Una delle superfici che delimitano la cavità è un pistone di area S a cui è applicata una forza vibromotrice armonica di frequenza angolare ω, a cui corrisponde una lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi\, c}{\omega}$$

La dimensione caratteristica della cavità è:

$$D = \frac{V_0}{S}$$



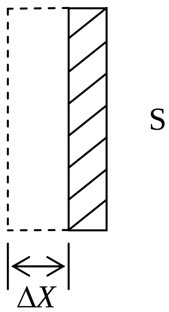
Si assumono valide le seguenti ipotesi:

- La frequenza della forza vibromotrice applicata è sufficientemente bassa per cui $\lambda >> D$; pertanto si può assumere che la pressione, variabile nel tempo, sia uniforme all'interno della cavità (condizione necessaria per la validità del modello a parametri concentrati).
- La conduzione termica alla parete è trascurabile, per cui la trasformazione termodinamica che descrive le oscillazioni acustiche è isoentropica (pV^{γ} = cost.).

- Le oscillazioni acustiche sono piccole perturbazioni per le quali:

$$p = \gamma \cdot p_0 \left(\frac{V}{V_0} \right) \qquad (1)$$

La portata acustica assume il valore:



$$\Delta V = S \Delta X$$

$$\Psi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} S \frac{\Delta x}{\Delta t} = Su = \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = j\omega V = \Psi \Rightarrow V = \frac{\Psi}{j\omega} \qquad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

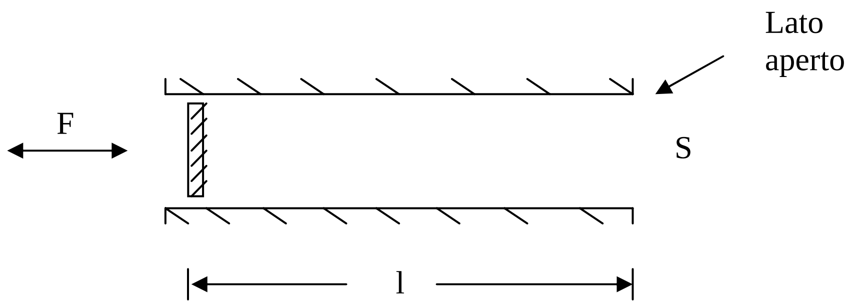
$$p = \frac{\gamma p_o \Psi}{j\omega V_o}$$

$$Z_a = \frac{p}{\Psi} = \frac{\gamma p_o}{j\omega V_o} = \frac{1}{j\omega\left(\frac{V_o}{\gamma p_o} \right)} \Rightarrow \boxed{C_a = \frac{V_0}{\gamma \; p_0}}$$

CEDEVOLEZZA ACUSTICA

3.2.2 Tubo

Si considera un condotto cilindrico di sezione *S* costante e lunghezza *l*, delimitato ad una estremità da un pistone di area *S*, a cui è applicata una forza vibromotrice armonica di frequenza angolare ω, con l'altra estremità aperta verso l'ambiente esterno.



$$m = \rho \; lS = massa \;\; di \;\; fluido \;\; nel \;\; tubo$$

Si assumono valide le seguenti ipotesi:

- La frequenza della forza vibromotrice applicata è sufficientemente bassa per cui $\lambda >> (D, l)$;
- L'effetto della viscosità del fluido è trascurabile (il moto oscillatorio del fluido avviene quindi senza dissipazione di energia);
- Il movimento oscillatorio dell'aria nel tubo avviene senza variazione di volume (il fluido si muove quindi come un cilindro indeformabile solidale con il pistone).

Dall'equilibrio tra forza vibromotrice trasmessa dal pistone al fluido e azione della pressione del fluido sul pistone si ottiene:

$$pS = F = m\frac{du}{dt} = mj\omega u = mj\omega\frac{\Psi}{S}$$

$$p = \frac{mj\omega\Psi}{S^2}$$

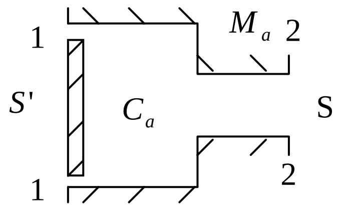
$$Z_a = \frac{p}{\Psi} = j\omega\frac{m}{S^2} = j\omega\frac{\rho \; l}{S} \;\; \Rightarrow \qquad \boxed{M_a = \frac{\rho \; l}{S}}$$

INERTANZA
ACUSTICA

3.3 Risonatori Acustici

Il risonatore acustico (spesso indicato come *Risonatore di Helmholtz*) è un dispositivo costituito dall'accoppiamento di:

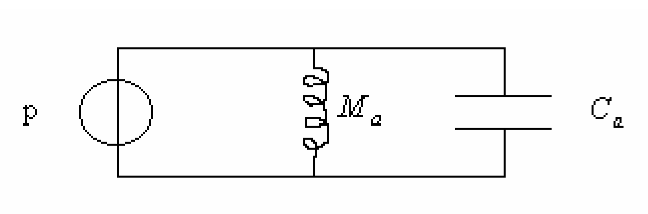
- una cavità di cedevolezza acustica C_a, delimitata da un pistone 1-1 di area *S'*
- un tubo di inertanza acustica M_a e sezione $S << S'$, aperto all'estremità 2-2



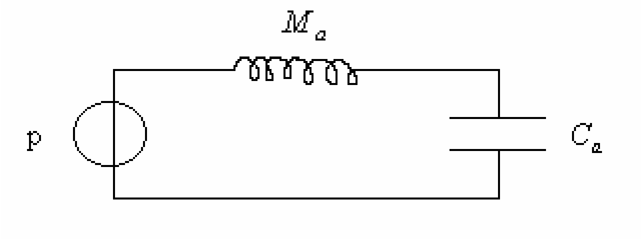
Numerose sono le applicazioni pratiche dei risonatori di Helmholtz: fra queste ricordiamo in particolare l'assorbimento selettivo di suoni di frequenza coincidente con la frequenza propria di risonanza del sistema.

Il circuito elettrico equivalente del risonatore assume forme diverse a seconda che la sollecitazione esterna sia applicata alla sezione 1-1 oppure alla sezione 2-2.

Nel primo caso, infatti, si può assumere uniforme la pressione che agisce nella cavità e che è applicata all'estremità del tubo; i due elementi (cavità e tubo) hanno dunque in comune la pressione (differenza di potenziale) e nell'analogo elettrico sono quindi collegati in parallelo.



Nel secondo caso, invece, la portata acustica nel tubo (costante nel tubo in quanto si assume il fluido incomprimibile) viene applicata anche alla cavità; i due elementi (cavità e tubo) hanno dunque in comune la portata acustica (corrente) e nell'analogo elettrico sono quindi collegati in serie.



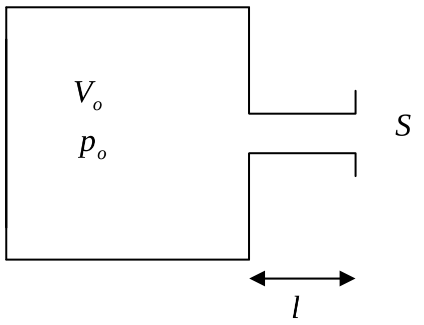
La frequenza propria f_o del risonatore si calcola imponendo la condizione $X_a = 0$, da cui risulta:

$$X_a = \omega_o M_a - \frac{1}{\omega_o C_a} = 0 \Rightarrow \omega_o^2 M_a C_a = 1$$

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{M_a C_a}}$$

Il calcolo di un risonatore può riguardare il *progetto* (determinazione della geometria tale da ottenere una frequenza di risonanza assegnata) oppure la *verifica* (calcolo della frequenza di risonanza di un sistema di geometria assegnata). La geometria del risonatore viene generalmente individuata dai seguenti valori:

- Volume della cavità V_o
- Lunghezza l e sezione S del tubo (detto anche *collo*)



$$M_a = \frac{\rho\, l}{S} \qquad C_a = \frac{V_o}{\gamma p_o}$$

$$\frac{1}{M_a C_a} = \frac{S}{\rho\, l}\frac{\gamma p_o}{V_o} = \gamma \frac{p_o}{\rho}\frac{S}{lV_o} = \gamma R^* T \frac{S}{lV_o}$$

Dall'equazione di stato dei gas ideali:

$$\frac{p_o}{\rho} = R^* T$$

Pertanto:

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\gamma R^* T}\sqrt{\frac{S}{lV_o}} \Rightarrow \qquad \boxed{f_o = \frac{c_o}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV_o}}}$$

3.4 Effetto dei fenomeni irreversibili

Nella trattazione del risonatore sopra riportata si sono trascurati i fenomeni irreversibili dovuti alla viscosità e alla conduzione termica nel fluido: ciò equivale a considerare l'impedenza acustica del sistema come una reattanza pura. Nella realtà i sistemi acustici (cavità e tubi) reali sono sede di fenomeni irreversibili che determinano dissipazioni di energia elastica. Le conseguenze sull'impedenza è duplice: da un lato si modificano, rispetto al caso ideale, i valori di C_a ed M_a; dall'altro compare una parte reale per cui l'impedenza acustica non è più puramente reattiva.

3.4.1 Tubo reale

Per tenere conto dei fenomeni dissipativi dovuti alla viscosità del fluido si utilizza la seguente espressione dell'impedenza acustica:

$$Z_a = R_a + j\omega M_a$$

in cui i valori della reattanza acustica R_a sono dati in funzione della geometria dalle seguenti relazioni sperimentali:

- *Tubo a sezione circolare*

$$R_a = \frac{8\mu\, l}{S r_o^2} \qquad S = 4\pi r_0^2$$

- *Fenditura rettangolare sottile* ($h >> b$)

$$R_a = \frac{12\mu\, l}{S h^2} \qquad S = bh$$

- *Cilindro di sezione costante qualsiasi S e perimetro L*

$$R_a = \frac{H\mu\, l}{S r_e^2} \qquad H = 8 \div 12 \qquad r_e = \frac{2S}{L}$$

Nelle equazioni precedenti:

l = lunghezza dell'elemento (m)

μ = viscosità dinamica del fluido (kg $m^{-1}s^{-1}$)

Inoltre, per tenere conto del fatto che, per effetto della viscosità, la velocità del fluido non è in realtà uniforme nella sezione, si corregge il valore dell'inertanza acustica introducendo un fattore correttivo χ_s:

$$M_a = \frac{\chi_s \rho\, l}{S}$$

dove:

- *Sezioni circolari*: $\chi_s = 4/3$
- *Sezioni rettangolari*: $\chi_s = 6/5$

Tali risultati sono validi per tubi di piccola sezione e per basse frequenze, ovvero quando è soddisfatta la seguente condizione:

$$r_e \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \le 1$$

dove:

$\nu = \mu/\rho$ = viscosità cinematica del fluido (m^2s^{-1})

$\nu = 1{,}33 \cdot 10^{-5}$ m^2s^{-1} per l'aria a 0° C

3.4.2 Cavità reale

Il comportamento acustico di una cavità reale è influenzato sia dai fenomeni dissipativi dovuti alla viscosità del fluido, sia dalla conduzione termica tra fluido e parete della cavità. Tali fenomeni determinano un incremento, rispetto al caso ideale, della cedevolezza acustica della cavità, che viene quindi corretta nel modo seguente:

$$C_a = \chi_p \cdot \frac{V_0}{(\gamma p_0)} \qquad \text{con } \chi_p > 1$$

La presenza del fattore correttivo $\chi_p > 1$ equivale ad introdurre, al denominatore dell'espressione teorica della cedevolezza acustica, al posto dell'esponente della isoentropica γ (che per i gas biatomici come l'aria è pari a 1,4) un coefficiente prossimo a 1. Dal punto di vista termodinamico ciò significa considerare la trasformazione come isoterma anziché adiabatica, ipotesi questa coerente con il fatto che l'energia termica generata dalla dissipazione viscosa viene trasferito alla parete per conduzione.

3.5 Riepilogo sulle varie definizioni di impedenza

Nei paragrafi precedenti sono state introdotte le tre seguenti definizioni di impedenza:

- *Impedenza meccanica* $\qquad Z_m = \frac{F}{u} = p\frac{S}{u}$
- *Impedenza acustica* $\qquad Z_a = \frac{p}{\psi} = \frac{p}{(S\ u)}$
- *Impedenza acustica specifica* $\qquad Z_S = \frac{p}{u}$

che risultano quindi correlate nel modo seguente:

$$Z_m = Z_s\, S = Z_a\, S^2$$

Si sottolinea che ciascuna delle grandezze sopra esposte si presta ad essere utilizzata in differenti situazioni:

- L'*impedenza meccanica* Z_m si utilizza nello studio di sistemi meccanici vibranti, ad esempio per analizzare un corpo rigido vibrante, soggetto a più forze, ma in cui ciascun punto è caratterizzato da un unico valore di velocità.
- L'*impedenza acustica* Z_a si utilizza nello studio dell'accoppiamento tra una sorgente sonora ed il fluido a contatto con essa; la sorgente è caratterizzata da un parametro globale, la portata acustica ψ (pari al prodotto velocità·area della sorgente), e da un valore uniforme di pressione p.
- L'*impedenza acustica specifica* Z_s si utilizza nello studio del campo sonoro generato dalla sorgente: essa è infatti l'unica delle tre impedenze ad avere un significato fisico preciso nei problemi di propagazione del suono in quanto, a differenza dalle precedenti, rappresenta una proprietà locale (e quindi puntuale anziché globale).